<u>Suma De números enteros</u>:

La suma de números enteros la dividiremos en tres casos:

I Caso: Suma de dos números positivos: en este caso los números se suman y el resultado queda positivo.

Ejemplos:

a) 23 + 78 = 101

b) 1246 + 987 = 2233

II Caso: Suma de dos números negativos: En este caso los números se suman y el resultado queda negativo.

Ejemplos:

a) – 432 + – 365 = – 797

b) – 79 + – 43 = – 122

III Caso: Suma de un número positivo y otro negativo: En este caso los números se restan y el resultado queda con el signo del número que tiene mayor valor absoluto.

Ejemplos:

a) – 5 + 8 = 3

b) – 14 + 4 = – 10

Resta De números enteros:

Para restar números enteros aplicaremos los siguientes pasos:

1. Escribimos el minuendo tal y como aparece.
2. Sustituimos la resta por una suma.
3. Cambiamos el sustraendo por su opuesto.
4. Aplicamos uno de los tres casos de la suma de números enteros.

Ejemplos:

a) $8-6=$
$8+-6=$
2

b) $-3-4=$
$-3+-4=$
-7

c) $4--6=$
$4+6=$
10

d) $-11--5=$
$-11+5$
-6

Operaciones combinadas:

Para resolver operaciones combinadas debemos tomar en cuenta el siguiente orden:

A. *Sin paréntesis:*

1. Potencias y radicales
2. Multiplicaciones y divisiones
3. Sumas y restas

B. *Con paréntesis*:

1. Paréntesis redondos $(\ )$
2. Paréntesis cuadrados $[\ ]$
3. Llaves $\{\ \}$

HOMOTECIAS

Conocimientos previos

Para abordar la temática de homotecia, resulta necesario recordar que la geometría analítica trabaja sobre el plano cartesiano y sobre éste se abordará el tema en cuestión.

El plano cartesiano nos brinda espacio para representar conceptos básicos de geometría con el uso de los pares ordenados.

A los polígonos se les pueden realizar algunas transformaciones o cambios con el fin de obtener nuevas figuras que posean diferentes medidas pero sin perder su forma.

Dentro de las transformaciones se pueden mencionar las siguientes:

A. AMPLIACIÓN O DILATACIÓN

Se puede realizar una transformación de dicha figura, a una más grande de la siguiente manera.

Procedimientos:

a) Se construye el polígono ABCDE.

b) Se construye un punto "O" llamado centro de la transformación.

c) Se mide la distancia desde cada vértice del polígono ABCDE al punto "O".

$$\overline{AO} = 2,8cm \qquad \overline{BO} = 3cm \qquad \overline{CO} = 2cm \qquad \overline{DO} = 2,9cm \qquad \overline{EO} = 3,2cm$$

d) Se establece una razón "k" (en este caso $k = \frac{3}{2}$) y obtenemos:

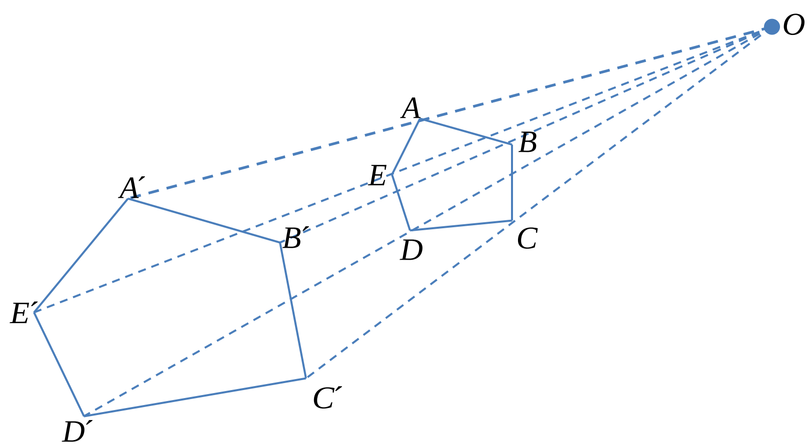
$$\overline{OA*} = k \bullet \overline{OA} \rightarrow \frac{3}{2} \bullet 2,8 = 4,2 \qquad \overline{OB*} = k \bullet \overline{OB} \rightarrow \frac{3}{2} \bullet 3 = 4,5$$

$$\overline{OC*} = k \bullet \overline{OC} \rightarrow \frac{3}{2} \bullet 2 = 3 \qquad \overline{OD*} = k \bullet \overline{OD} \rightarrow \frac{3}{2}\ 2,9\bullet\ = 4,3$$

$$\overline{OE*} = k \bullet \overline{OE} \rightarrow \frac{3}{2} \bullet 3,2 = 4,8$$

e) Luego se unen esos puntos como se muestran en la figura y se forman el Polígono A"B"C"D"E el cual se considera como la homotecia del polígono ABCDE.

f) En este caso como $k > 0$ decimos que es una homotecia se le aplicó una ampliación o dilatación.



B. DISMINUCIÓN O CONTRACCIÓN

Para formar una figura de menor tamaño a la original, se siguen los siguientes pasos:

1. Se define un punto origen llamado "O" fuera de la figura.

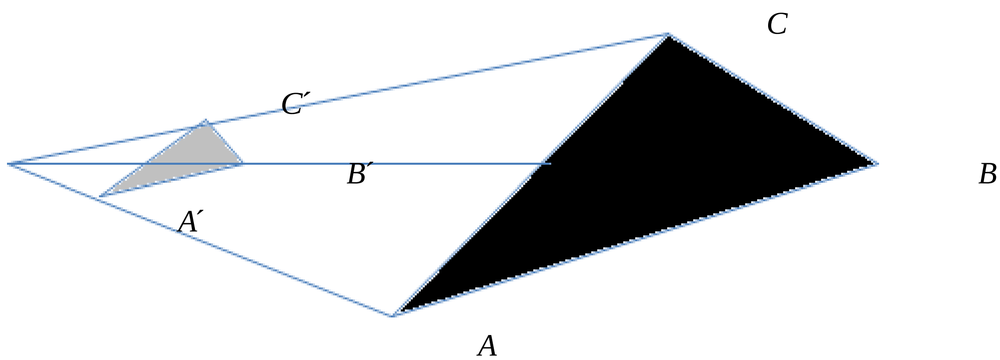
2. Se trazan los segmentos que une cada vértice con el punto "O".

3. Se mide cada segmento y escogemos una constante "k" mayor que 0 y menor que 1, la cuál multiplicará cada medida de los segmentos.

4. Se marcan los puntos sobre los segmentos de modo que posean las medidas obtenidas en las multiplicaciones.

5. Se asigna nombre a los nuevos vértices y trazamos los segmentos formando una figura similar a la original.

6. Se eliminan las líneas trazadas quedando la figura original y su transformación.



C. AMPLIACIÓN O DILATACIÓN INVERSA

Para realizar una transformación en donde la figura se invierta de posición se siguen los siguientes pasos:

1. Se define un punto de origen llamado "O" fuera de la figura.

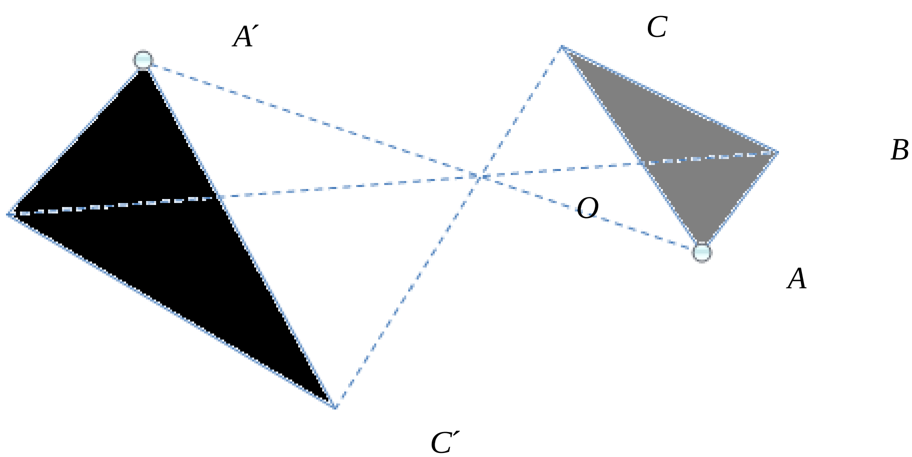
2. Se trazan los segmentos que unen cada vértice con el punto "O".

3. Se mide cada segmento y escogemos una constante "k" menor que – 1, la cuál multiplicará cada medida de los segmentos. El signo negativo indica que posee la dirección contraria de los segmentos originales.

4. Se extienden los segmentos de modo que posean las medidas obtenidas en las multiplicaciones pero en dirección contraria.

5. Se asigna nombre a los nuevos vértices trazamos los segmentos formando una figura similar a la original.

6. Se eliminan las líneas trazadas quedando la figura original y su transformación.



D. DISMINUCIÓN O CONTRACCIÓN INVERSA:

Para una transformación en donde la figura quede invertida y de menor tamaño se realizan los siguientes pasos:

1. Se define un poquito de origen llamado "O" fuera de la figura.
2. Se trazan los segmentos que unen cada vértice con el punto "O"
3. Se mide cada segmento y escogemos una constante "k" entre 0 y – 1, la cuál multiplicará cada medida de los segmentos. El signo negativo indica que tendrán la dirección opuesta.
4. Se marcan los puntos sobre los segmentos de modo que posean las medidas obtenidas en las multiplicaciones.

5. Se asigna nombre a los nuevos vértices, trazamos los segmentos formando una figura similar a la original.

6. Se eliminan las líneas trazadas quedando la figura original y su transformación.

RESUMEN

A continuación se le presentan las cuatro transformaciones vistas, dependiendo del valor de la constante "k" asignada.

a) Ampliación o dilatación $k > 1$

b) Disminución o contracción $0 < k < 1$

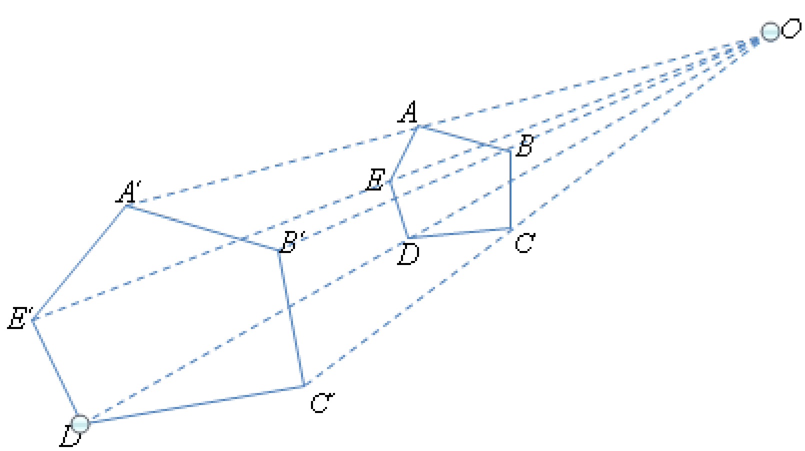
c) Ampliación o dilatación inversa $k < -1$

d) Disminución o contracción inversa $-1 < k < 0$

Definición:

Una homotecia es una transformación geométrica que a partir de un punto fijo "O" llamado centro de homotecia todas las distancias de los puntos a "O", serán multiplicadas por un valor constante "k" distinto de cero llamado RAZÓN DE HOMOTECIA.

En una homotecia la figura original y aquella generada por la homotecia mantienen una estrecha relación en cuanto se define.



Puntos Homólogos: Los puntos de la figura original con la figura producida por la homotecia que se encuentran en el mismo segmento son los puntos homólogos.

$$\left.\begin{array}{l} A \text{ y } A' \\ B \text{ y } B' \\ C \text{ y } C' \\ D \text{ y } D' \\ E \text{ y } E' \end{array}\right\} \text{ Puntos homólogos}$$

Ángulos Homólogos: como la figura mantiene la forma, los ángulos que poseen la figura original y aquellos de la figura producida son congruentes (igual medida).

$$\left.\begin{array}{l} \sphericalangle A \text{ y } \sphericalangle A' \\ \sphericalangle A \text{ y } \sphericalangle A' \\ \sphericalangle A \text{ y } \sphericalangle A' \\ \sphericalangle A \text{ y } \sphericalangle A' \\ \sphericalangle A \text{ y } \sphericalangle A' \end{array}\right\} \text{ Ángulos homólogos}$$

Lados Homólogos: Los lados correspondientes entre las figuras son proporcionales (al dividir sus medidas el resultado es igual), esto es que mantienen una proporción “k”.

$$\left.\begin{array}{l}\overline{AB} \text{ y } \overline{A'B'} \\ \overline{AB} \text{ y } \overline{A'B'} \\ \overline{AB} \text{ y } \overline{A'B'} \\ \overline{AB} \text{ y } \overline{A'B'} \\ \overline{AB} \text{ y } \overline{A'B'}\end{array}\right\} \text{Lados homólogos}$$

FIGURAS HOMOTÉCICAS EN EL PLANO.

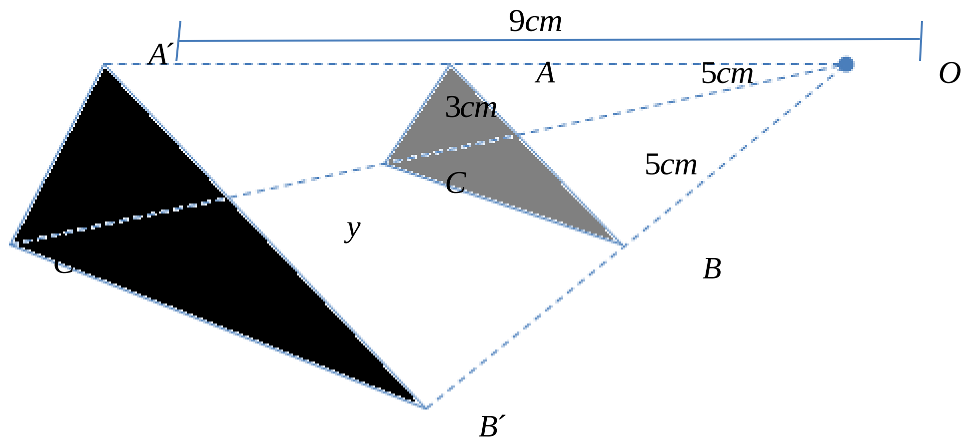
Para determinar si una figura es homotecia de otra podemos hacerlo siguiendo este método:

1. Se trazan las rectas que contienen los puntos que se suponen son homólogos. Éstos deben coincidir en un punto.

2. Se realiza las mediciones de los segmentos definidos por los vértices de las figuras y el centro “O”.

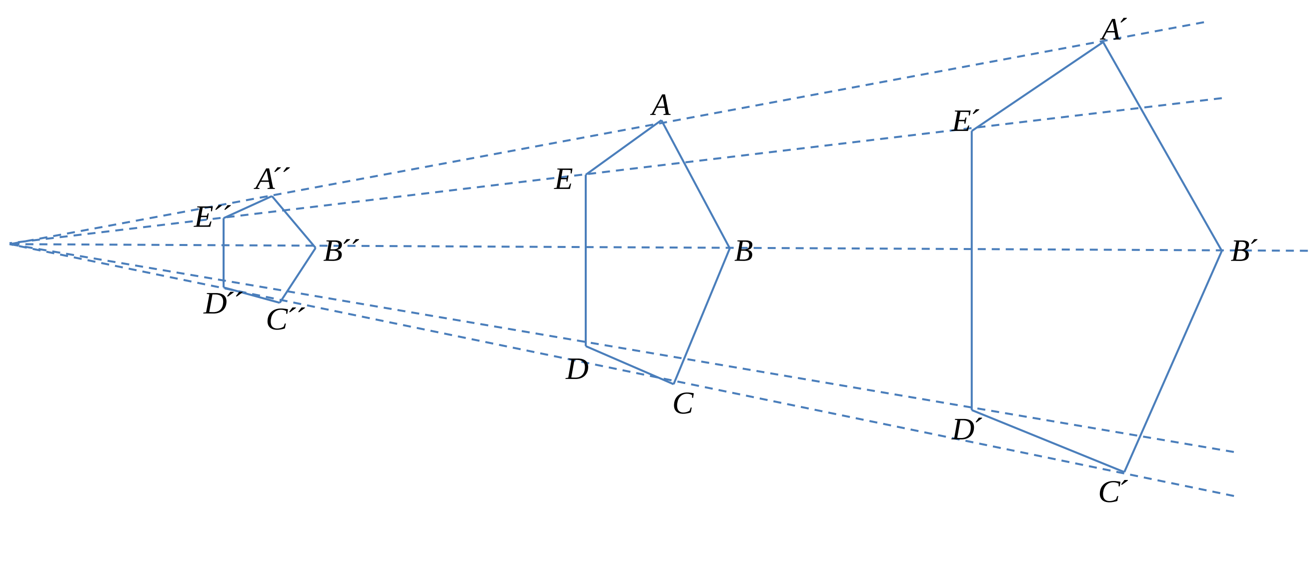
3. Se determina la relación entre los segmentos homólogos y se verifica, se mantienen la misma proporción.

4. Con ello se puede determinar que hay homotecia y definir el centro de homotecia.



CONCEPTO DE SEMEJANZA EN MATEMÁTICA.

En matemática el concepto de “semejanza” está muy ligado al concepto de proporcionalidad; por ello se dice que dos objetos son semejantes si tienen una proporción entre ellos.



SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

<u>DEFINICIÓN:</u>

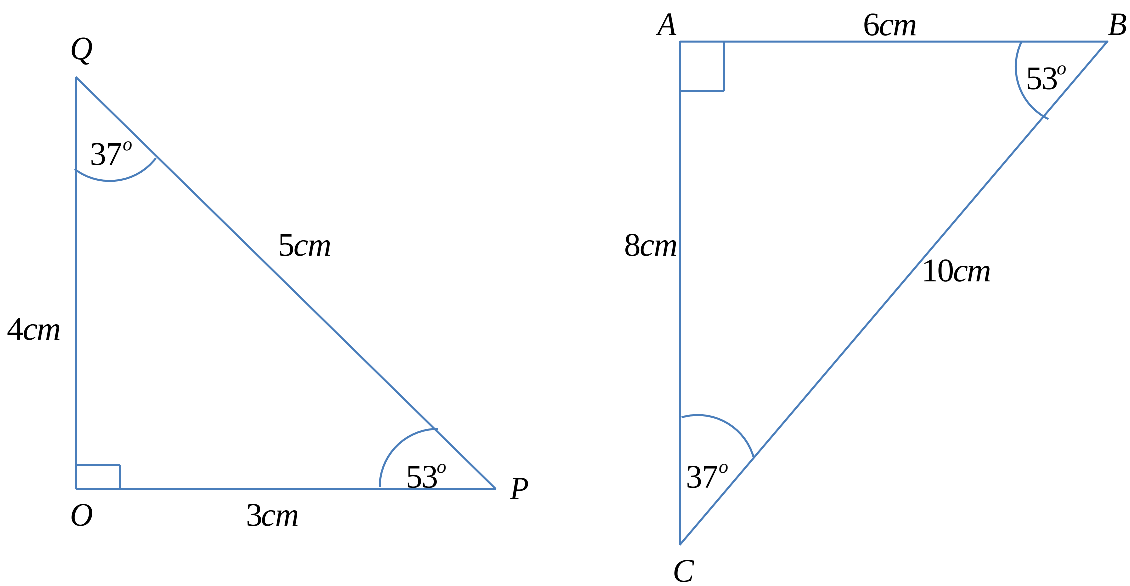
Dos triángulos son semejantes si tienen ángulos homólogos (ángulos correspondientes) congruentes y lados homólogos (lados correspondientes) proporcionales.

Por ello cualquier triángulo generado por una homotecia es semejante al triángulo dado.

El triángulo ΔOPQ es semejante con el triángulo ΔABC

<table>
<tr><td colspan="2">NOTACIÓN: $\Delta OPQ \sim \Delta ABC$
Indica la semejanza entre los triángulos.</td></tr>
<tr><td>Ángulos congruentes</td><td>Lados proporcionales</td></tr>
<tr><td>$\sphericalangle O \cong \sphericalangle A$
$\sphericalangle P \cong \sphericalangle B$
$\sphericalangle Q \cong \sphericalangle C$</td><td>$\dfrac{\overline{OP}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{PQ}}{BC} = \dfrac{\overline{OQ}}{AC}$

$\dfrac{3}{6} = \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2}$</td></tr>
</table>



En este caso la constante de proporcionalidad (razón de semejanza) corresponde a $\frac{1}{2}$

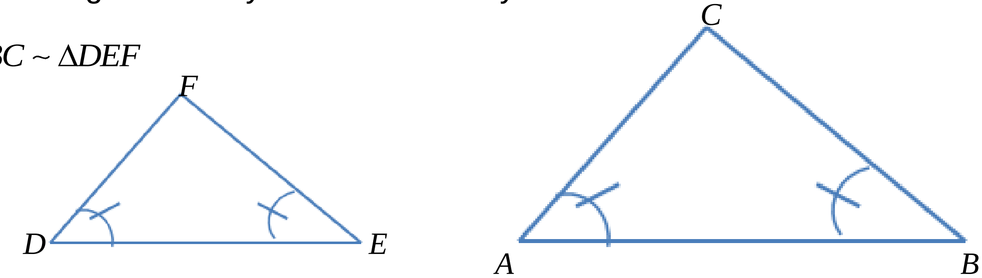
CRITERIOS DE SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

Criterio Ángulo – Ángulo (A – A)

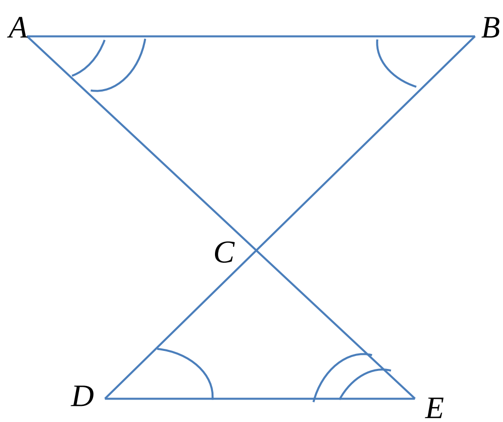
Si dos ángulos de un triángulo son congruentes a dos ángulos de un segundo triángulo, entonces, estos dos triángulos son semejantes.

Es decir, en los triángulos ABC y DEF: $\measuredangle A \cong \measuredangle D$ y $\measuredangle B \cong \measuredangle E$

Entonces $\Delta ABC \sim \Delta DEF$



Ejemplo:



Según la figura, si $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$

¿Es $\Delta ABC \sim \Delta DCE$?

Si $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$, entonces $\measuredangle D \cong \measuredangle B$

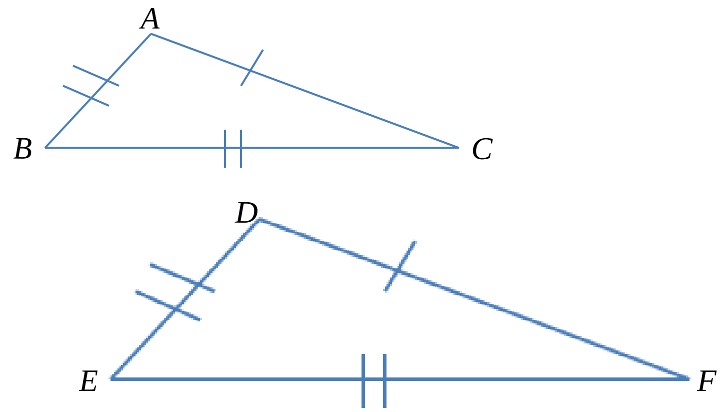
(Alternos internos entre paralelas) y $\measuredangle E \cong \measuredangle A$ (Alternos internos entre paralelas)

Por lo tanto: $\Delta ABC \sim \Delta DCE$

Criterio Lado – Lado – Lado (L – L – L)

Dos triángulos son semejantes si tienen sus tres lados respectivamente proporcionales.

Es decir, en los triángulos ABC y DEF:

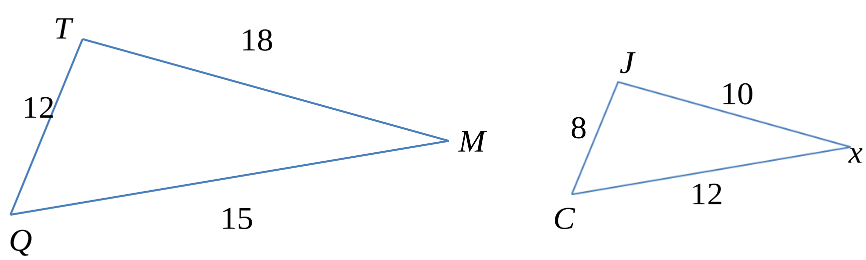


Si $\frac{\overline{AC}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}$

Entonces $\Delta ABC \sim \Delta DEF$

Ejemplo:

¿Son semejantes los triángulos ΔTMQ y ΔCXJ ?



Cómo: $\frac{18}{12} = \frac{12}{8} = \frac{15}{10}$ Entonces $\Delta TMQ \sim \Delta CXJ$

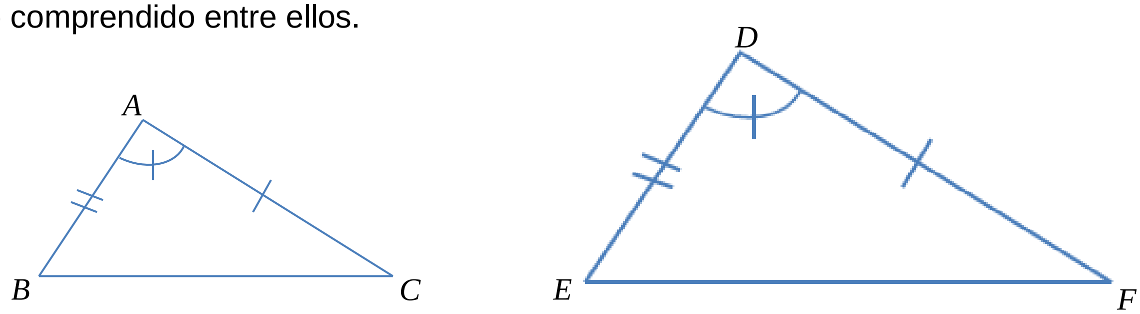
CRITERIOS DE CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS

Cuando una figura se puede convertir en otra manteniendo su forma y tamaño, utilizando giros, volteos y deslizamientos, las dos figuras son congruentes.

Dos ó más triángulos son congruentes si tienen la misma forma y tamaño, aunque no necesariamente la misma posición en el plano. Por tal razón, estos triángulos poseen igual área. Para determinar la congruencia entre dos o más triángulos cualesquiera basta que se cumpla alguno de los siguientes criterios.

Criterio Lado – Ángulo – Lado (L – A – L)

Dos triángulos son semejantes si tienen dos lados proporcionales y congruentes el ángulo comprendido entre ellos.



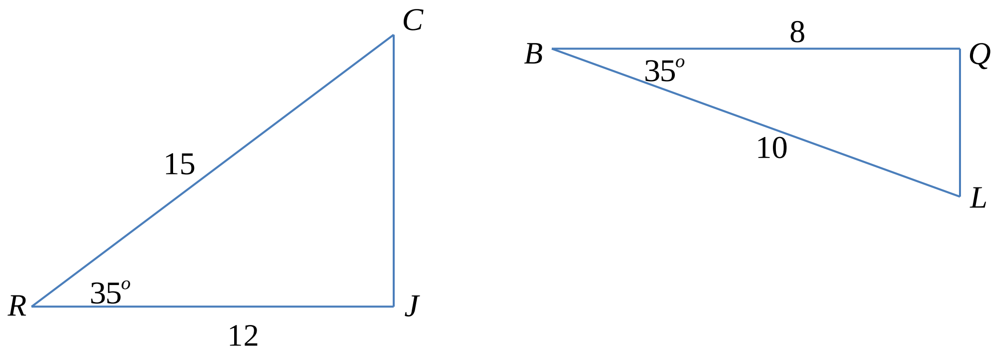
Es decir, en los triángulos ABC y DEF,

Si $\sphericalangle A \cong \sphericalangle D$ y $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{DE}}$

Entonces $\Delta ABC \sim \Delta DEF$

Ejemplo: ¿son semejantes los triángulos?

Como $\frac{15}{10}=\frac{12}{8}$ y además $\measuredangle R \cong \measuredangle B = 35^o$



Entonces $\Delta CRJ \sim \Delta LBQ$

Primer criterio de congruencia: LLL

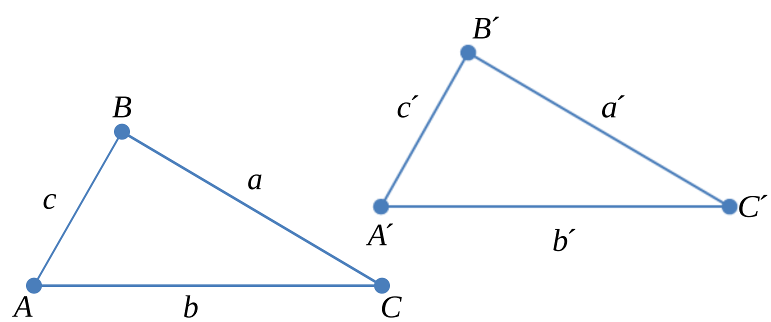
Dos triángulos son congruentes si sus tres lados homólogos son respectivamente iguales

$a \cong a'$

$b \cong b'$

$c \cong c'$

$\rightarrow \Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$



Segundo criterio de congruencia: LAL

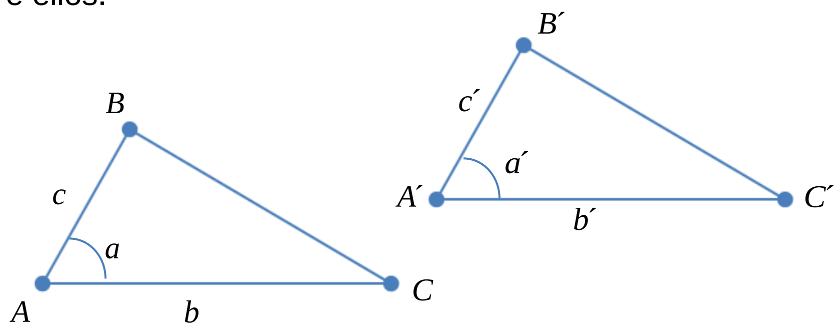
Dos triángulos son congruentes si son respectivamente iguales dos de sus lados y el ángulo comprendido entre ellos.

$b \cong b'$

$c \cong c'$

$\alpha \cong \alpha'$

$\rightarrow \Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$



Tercer criterio de congruencia: ALA

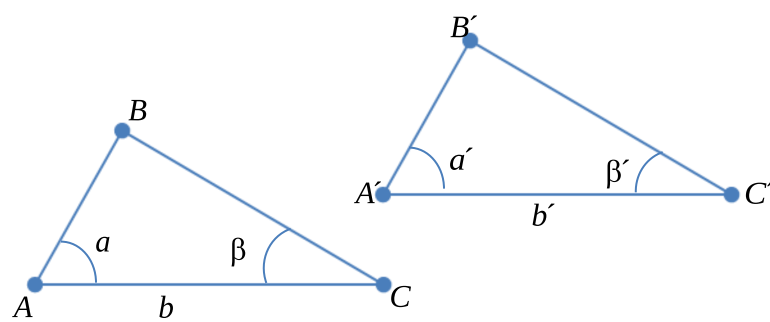
Dos triángulos son congruentes si tienen un lado congruente y los ángulos con vértice en los extremos de dicho lado también congruentes. A estos ángulos se les llama adyacentes al lado

$b \cong b'$

$a \cong a'$

$\beta \cong \beta'$

$\rightarrow \Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$



THALES

Thales de Mileto (c. 625/4 A. C., -c. 547/6 a. C.) fue un filósofo y científico griego. Nació y murió en Mileto, polos griega de la costa Jonia (hoy en Turquía). Fue el iniciador de la Escuela filosófica milesia a la que pertenecieron también Anaximandro (su discípulo) y Anaxímenes (discípulo del anterior). En la antigüedad se le consideraba uno de los Siete Sabios de Grecia. No se conserva ningún argumento suyo y es probable que no dejara ningún escrito en su muerte. Se le atribuyen desde el s. V a. C. importantes aportaciones en el terreno de la filosofía, las matemáticas, astronomía, física, etc., así como un activo papel como legislador en su ciudad nata.

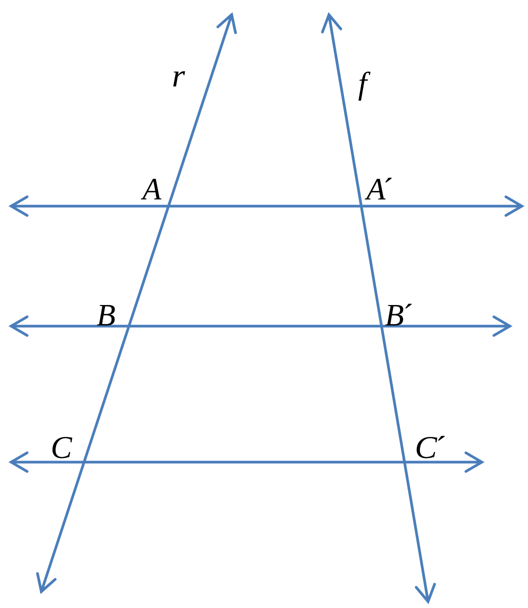
Thales es a menudo considerado el iniciador de la especulación científica y filosófica griega y occidental, aunque su figura y aportaciones están rodeadas de grandes incertidumbres.

Se suele aceptar que Thales comenzó a usar el pensamiento deductivo aplicado a la geometría, y se le atribuye la enunciación de dos teoremas geométricos que llevan su nombre.

<u>Teorema de Thales</u>

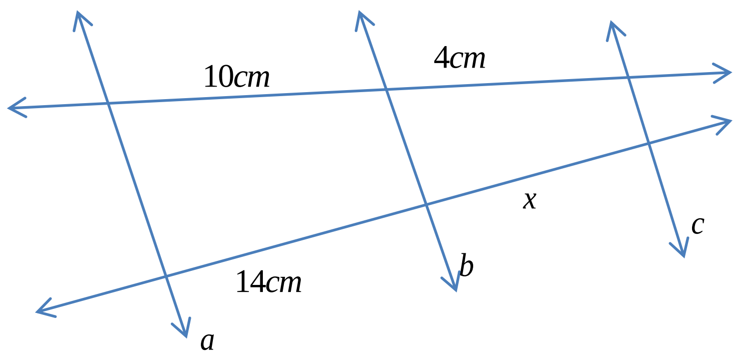
Si dos rectas cualesquiera se cortan por varias rectas paralelas, los segmentos determinados en una de las rectas son proporcionales a los segmentos correspondientes en la otra.

1. $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$
2. $\frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$
3. $\frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}$
4. $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$
5. $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{A'B'}}$
6. $\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{B'C'}}$



Ejemplos:

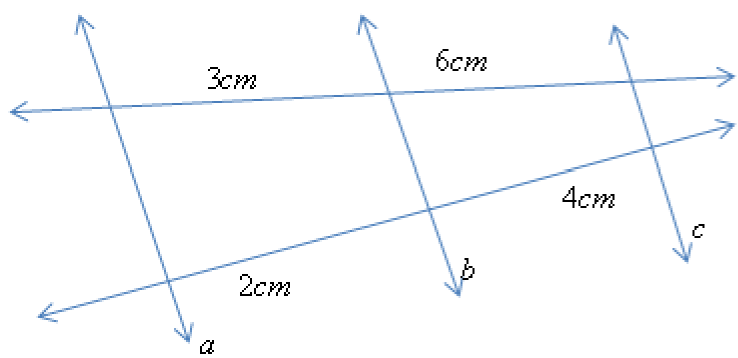
1. Las rectas a, b y c son paralelas. Halla la longitud de x.



$$\frac{14}{10}=\frac{x}{4}$$

$$x=\frac{14\bullet 4}{10}=5.6cm$$

2. Las rectas a, n son paralelas. ¿Podemos afirmar que c es paralela a las rectas a y b?

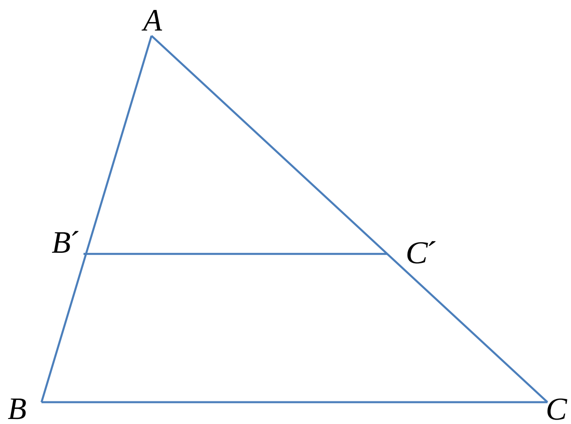


Sí, porque se cumple el teorema de Thales.

$$\frac{3}{2}=\frac{6}{4} \qquad 12=12$$

Teorema de Thales en un triángulo

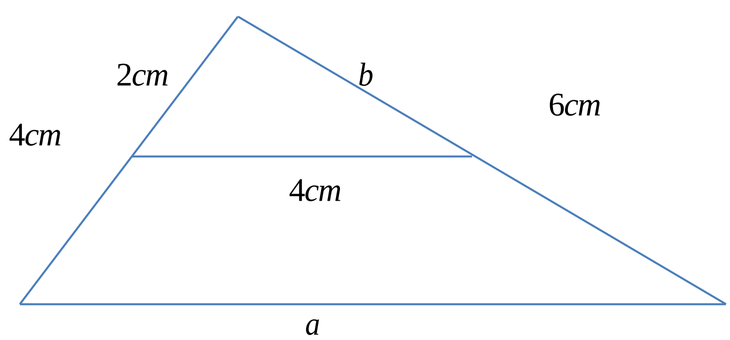
Dado un triángulo ABC, si se traza un segmento paralelo, B´C´, a uno de los lados del triángulo, se obtiene otro triángulo AB´C´, cuyos lados son proporcionales a los tres del triángulo ABC.



$$\frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'} = \frac{BC}{B'C'}$$

Ejemplo:

Hallar las medidas de los segmentos a y b.



$\frac{4}{2} = \frac{a}{4}$ $\quad a = 8cm$ $\quad \frac{4}{2} = \frac{6}{b}$ $\quad b = 3cm$

Pirámide recta

Para Molina (2010) “Usualmente, se refiere a la pirámide recta. Poliedro formado al “proyectar” un polígono hacia un punto a una cierta altura sobre él”. También encontramos una definición para la pirámide recta donde cita “pirámide cuyo vértice se encuentra perpendicular sobre el centro (de gravedad) de la base”.

La cara inferior de la pirámide se conoce como base, a las demás se nombran como caras laterales.

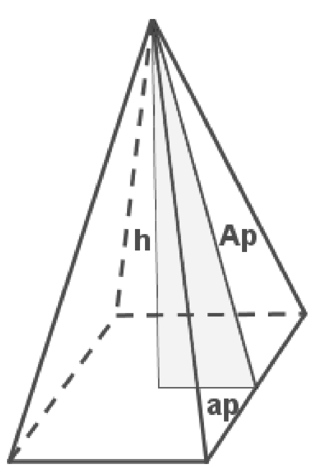
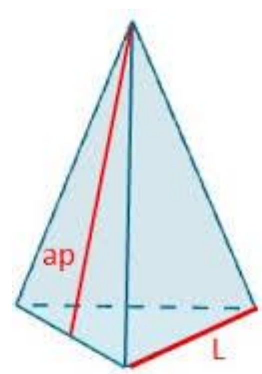
La distancia entre el centro de la base y vértice de la pirámide es la altura de la pirámide.

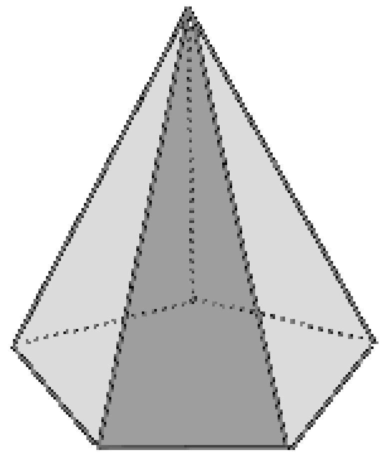
Al segmento que va entre el centro de la base y la mitad del lado de la base se le llama apotema de la base.

El segmento que va desde la cúspide hasta la mitad del lado de la base es apotema de la pirámide.

Las pirámides varían según la base de la misma.

Pirámide triangular Base: 3 lados
Pirámide cuadrangular Base: 4 lados
Pirámide pentagonal Base: 5 lados
Pirámide hexagonal Base: 6 lados

Pirámide cuadrada	Pirámide triangular
	

PRISMA RECTO

Parafraseando a Molina (2010) Un prisma recto es aquel cuyas caras laterales son perpendiculares a las bases.

Prisma regular recto las caras laterales son rectángulos congruentes o cuadrados, las caras laterales son paralelogramos congruentes.

Los prismas regulares rectos variarán a la base.

Prisma Cuadrangular	Prisma Rectangular	Prisma Triangular