Función Cuadrática

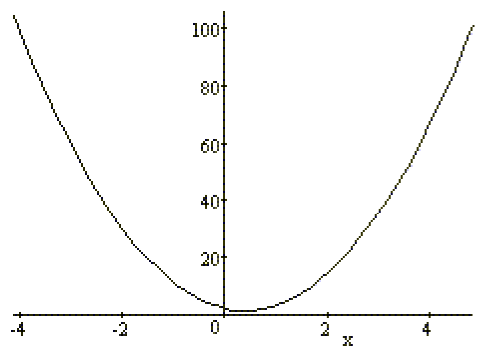
Es de la forma:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Detalles importantes:

- ✷ La representación gráfica en el plano cartesiano de una función cuadrática es una parábola, cuyo eje de simetría es paralelo al eje de las ordenadas.

La parábola se abrirá hacia arriba si el signo de "a" es positivo, osea a>0, lo que quiere decir que la función es cóncava hacia arriba



$y=5x^2-4x+2$

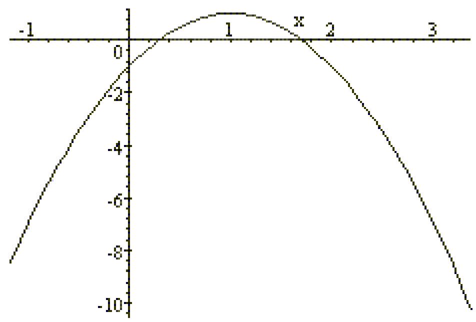
La función será estrictamente decreciente en

$$\left]-\infty, \frac{-b}{2a}\right[$$

Así como estrictamente creciente en:

$$\left]\frac{-b}{2a}, +\infty\right[$$

Y hacia abajo en caso de que "a" sea negativo, osea a<0, lo que indica que la función es cóncava hacia abajo.



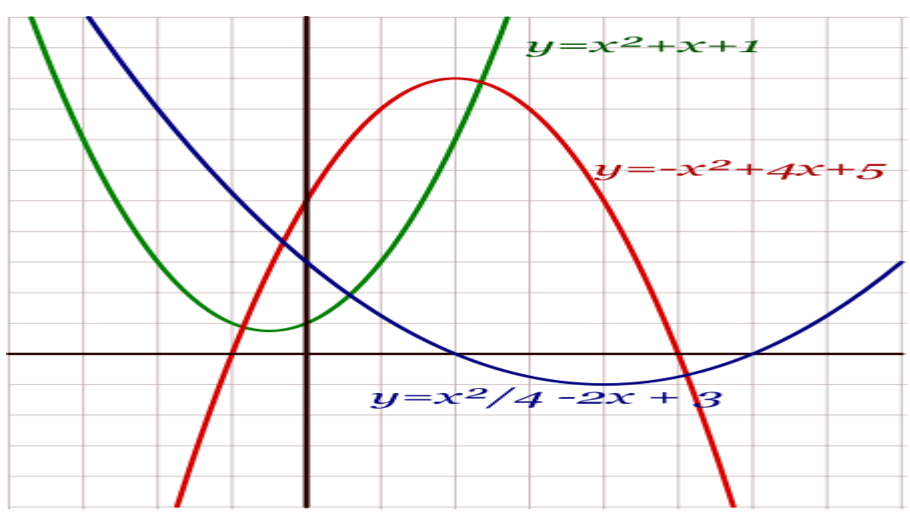
$y=-2x^2+4x-1$

De paso la función será estrictamente creciente en el siguiente intervalo:

$$]-\infty,\frac{-b}{2a}[$$

Además será decreciente en el siguiente intervalo:

$$]\frac{-b}{2a},+\infty[$$



* Las raíces o ceros de una función cuadrática, como en toda función, son los valores de *x*, para los cuales $f(x) = 0$. Por tratarse de un polinomio de grado 2, habrá a lo sumo 2 raíces, denotadas habitualmente como: x_1 y x_2, dependiendo del valor del discriminante Δ definido como $\Delta = b^2 - 4ac$.

Dos soluciones reales y diferentes si el discriminante es positivo serán determinadas de la siguiente manera:

$$\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{y} \quad \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Por ejemplo para la siguiente función:

$$2x^2 + x - 3 = 0$$

Los ceros, se calculan de la siguiente forma aplicando la formula general.

$$\begin{aligned}
x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
x &= \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{4} \\
x_1 &= \frac{-1-5}{4} = \frac{-6}{4} = \frac{-3}{2} \\
x_2 &= \frac{-1+5}{4} = \frac{4}{4} = 1
\end{aligned}$$

Estas son las 2, soluciones de la función, siempre y cuando el discriminante, sea mayor a 0.

- Ahora si el discriminante es 0. La solución será real y DOBLE. Y se calculara así:

$x = \frac{-b}{2a}$

Y está solución además corresponde a la recta del eje de simetría de la función.

Ejemplo

Sea $f(x) = x^2 + 6x + 9$

Si calculamos el discriminante

$$\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4(1)(9) = 0$$

Por lo que la única solución será igual a:

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2(1)} = -3$$

Es decir $x_1 = x_2 = -3$

Representaciones de la función cuadrática

Forma desarrollada

La forma desarrollada de una función cuadrática (o forma estándar) corresponde a la del polinomio de segundo grado, escrito convencionalmente como:

$f(x) = ax^2 + bx + c$ con $a \neq 0$.

Forma factorizada

Toda función cuadrática se puede escribir en forma factorizada en función de sus raíces como:

$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, siendo a el coeficiente principal de la función, y x_1 y x_2 las raíces de $f(x)$. En el caso de que el discriminante Δ sea igual a 0 entonces $x_1 = x_2$ por lo que la factorización adquiere la forma:

$$f(x) = a(x - x_1)^2$$

En este caso a x_1 se la denomina raíz doble.

Cortes de la función en el eje "x" y "y"

Para x

Las distintas soluciones de la ecuación de segundo grado, son los casos de corte con el eje x, que se obtienen, como es sabido, por la expresión:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Para y

La función corta el eje "y" en el punto → (0, c).

Eje de simetría

$$x = \frac{-b}{2a}$$

Este es un eje que divide a la parábola en dos partes iguales, es decir simétricas.

Vertices

$V = (\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a})$

Este vértice será un punto máximo, si la parábola es cóncava hacia abajo. Y será un punto mínimo si la parábola es cóncava hacia arriba.

Valor máximo o mínimo de una función cuadrática

Para todo "a" diferente de 0. Vamos a tener dos casos. Pero citemos la formula a utilizar:

$$y = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

Habrá un valor máximo de la parábola de la función cuando **a<0.**

Habrá un valor mínimo de la parábola de la función cuando **a>0.**

Ámbito de una función cuadrática

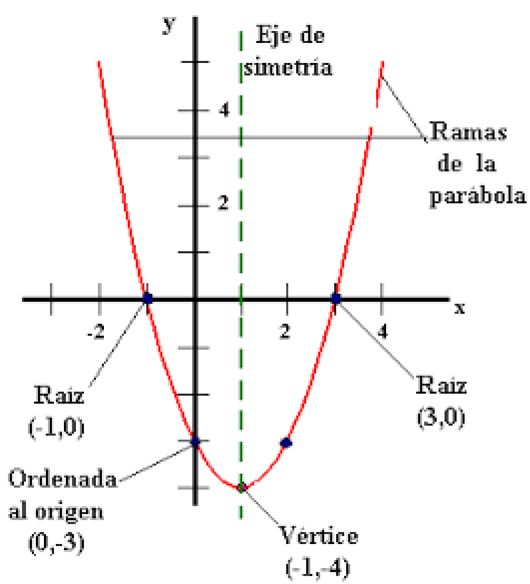
Si a<0. Se calcula como sigue:

$$]-\infty, \frac{4ac-b^2}{4a}]$$

Si a>0. Se calcula como sigue:

$$[\frac{4ac-b^2}{4a}, +\infty[$$

Ilustración



Ejercicios de la función cuadrática

- **Representar las funciones cuadráticas**

1. $y = -x^2 + 4x - 3$
2. $y = x^2 + 2x + 1$
3. $y = x^2 + x + 1$

- **Halla el vértice y la ecuación del eje de simetría de las siguientes parábolas:**

1. $y = (x-1)^2 + 1$
2. $y = 3(x-1)^2 + 1$
3. $y = 2(x+1)^2 - 3$
4. $y = -3(x - 2)^2 - 5$
5. $y = x^2 - 7x - 18$
6. $y = 3x^2 + 12x - 5$

- **Indicar, sin dibujarlas, en cuantos puntos cortan al eje de abscisas las siguientes parábolas:**

1. $y = x^2 - 5x + 3$
2. $y = 2x^2 - 5x + 4$
3. $y = x^2 - 2x + 4$
4. $y = -x^2 - x + 3$

- Una función cuadrática tiene una expresión de la forma $y = x^2 + ax + a$ y pasa por el punto (1, 9). Calcular el valor de a.
- Se sabe que la función cuadrática de ecuación $y = ax^2 + bx + c$ pasa por los puntos (1,1), (0, 0) y (-1,1). Calcula a, b y c.
- Una parábola tiene su vértice en el punto V(1, 1) y pasa por el punto (0, 2). Halla su ecuación.

- Partiendo de la gráfica de la función $f(x) = x^2$, representa:

1. $y = x^2 + 2$

2. $y = x^2 - 2$

3. $y = (x + 2)^2$

4. $y = (x + 2)^2$

5. $y = (x - 2)^2 + 2$

6. $y = (x + 2)^2 - 2$

Solución de algunos de los ejercicios

- Representar gráficamente la función cuadrática:

✷ $y = x^2 + 2x + 1$

1. Vértice

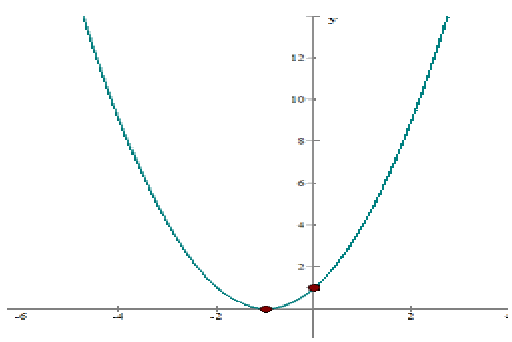
$x_v = - 2/ 2 = -1$ $y_v = (-1)^2 + 2\cdot (-1) + 1= 0$ **V(- 1, 0)**

2. Puntos de corte con el eje OX.

$x^2 + 2x + 1= 0$ $$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

Coincide con el vértice: (-1, 0)

3. Punto de corte con el eje OY. **(0, 1)**



✷ $y = x^2 + x + 1$

1. Vértice

$x_v = -1/2$ $y_v = (-1/2)^2 + (-1/2) + 1 = 3/4$

V(-1/ 2, 3/ 4)

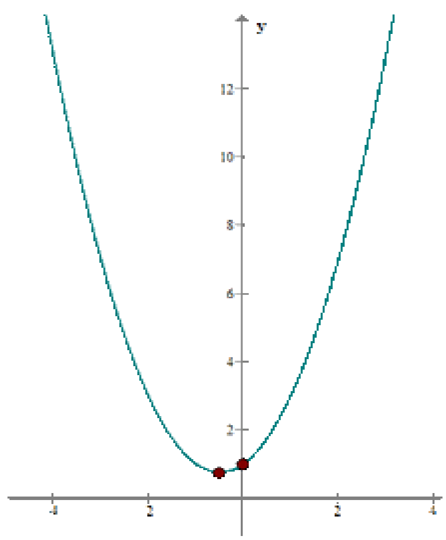
2. Puntos de corte con el eje OX.

$x^2 + x + 1 = 0$

$1^2 - 4 < 0$ No hay puntos de corte con OX.

3. Punto de corte con el eje OY.

(0, 1)



- Hallar el vértice y la ecuación del eje de simetría de las siguientes parábolas:

1. $y= (x-1)^2 + 1$

$V= (1, 1)$ $x = 1$

2. $y= 3(x-1)^2 + 1$

$V= (1, 1)$ $x = 1$

3. $y= 2(x+1)^2 - 3$

$V= (-1, -3)$ $x = -1$

4. $y= -3(x - 2)^2 - 5$

$V= (2, -5)$ $x = 2$

5. $y = x^2 - 7x -18$

$V= (7/2, -121/ 4)$ $x = 7/2$

6. $y = 3x^2 + 12x - 5$

$V= (-2, -17)$ $x = -2$

- Indicar, sin dibujarlas, en cuantos puntos cortan al eje de abscisas las siguientes parábolas:

1. $y = x^2 - 5x + 3$

$b^2 - 4ac = 25 - 12 > 0$ **Dos puntos de corte**

2. $y = 2x^2 - 5x + 4$

$b^2 - 4ac = 25 - 32 < 0$ **No hay puntos de corte**

3. $y = x^2 - 2x + 4$

$b^2 - 4ac = 4 - 4 = 0$ **Un punto de corte**

4. $y = -x^2 - x + 3$

$b^2 - 4ac = 1 + 12 > 0$ **Dos puntos de corte**

- Una función cuadrática tiene una expresión de la forma $y = x^2 + ax + a$ y pasa por el punto (1, 9). Calcular el valor de a.

$9 = 1^2 + a \cdot 1 + a$ **$a = 4$**

- Una parábola tiene su vértice en el punto V(1, 1) y pasa por el punto (0, 2). Halla su ecuación.

La coordenada x del vértice es 1.

$1 = -b / 2a$ $b = -2a$

$y = ax^2 + bx + c$

$f(0)=2$

$2 = c$

$f(1) = 1$

$1 = a + b + 2$ $1 = a - 2a + 2$

$a=1$ $b = -2$

$y = x^2 - 2x + 2$

- Partiendo de la gráfica de la función $f(x) = x^2$, representa:

1. $y = x^2 + 2$

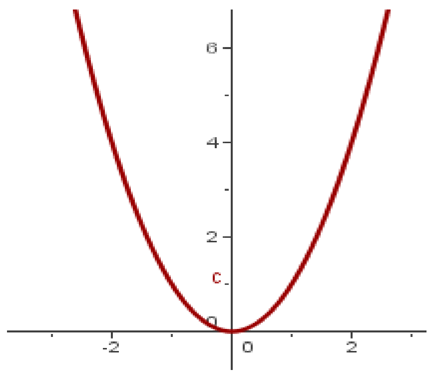
2. $y = x^2 - 2$

3. $y = (x + 2)^2$

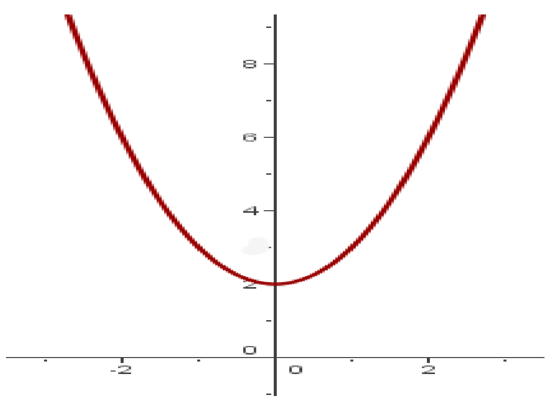
4. $y = (x + 2)^2$

5. $y = (x - 2)^2 + 2$

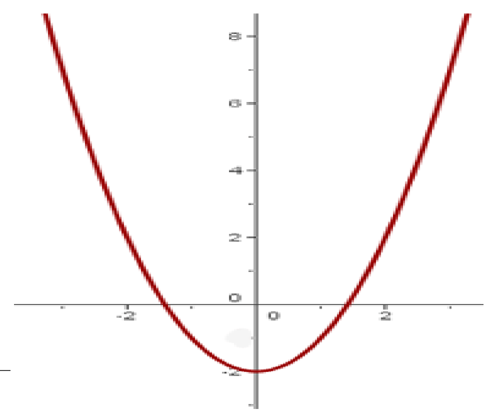
6. $y = (x + 2)^2 - 2$



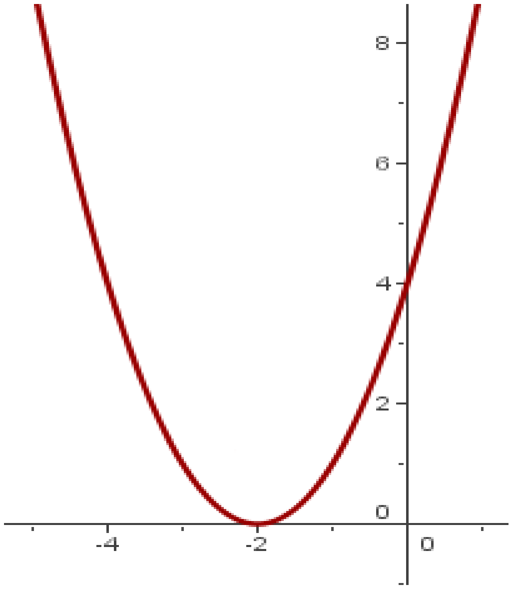
$y = x^2$

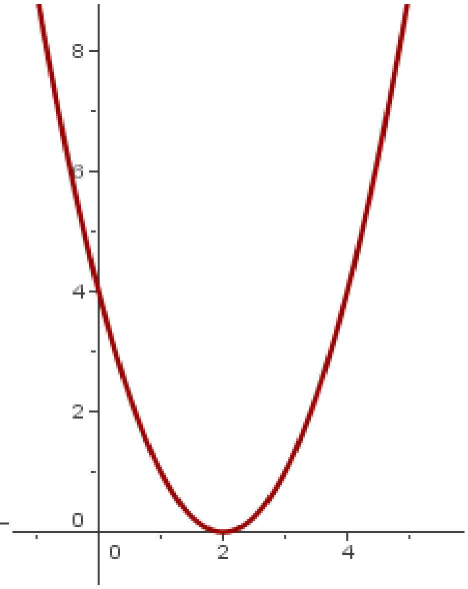


$y = x^2 + 2$

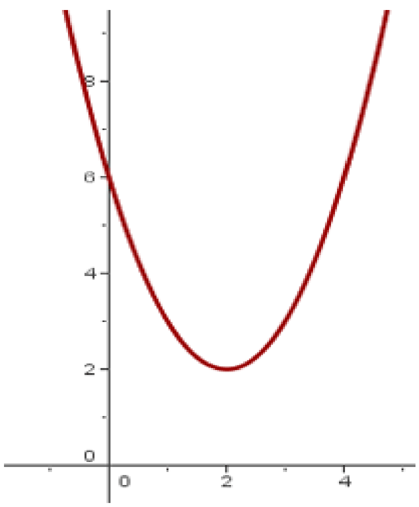


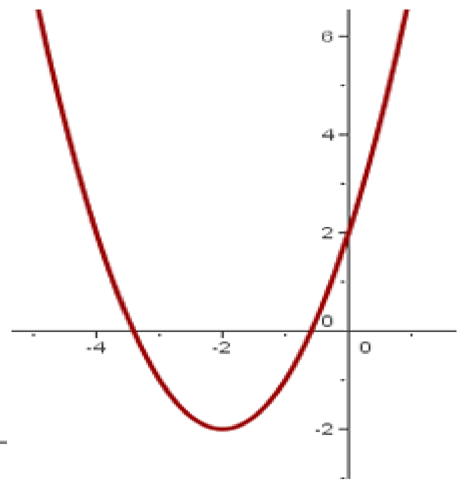
$y = x^2 - 2$





y = (x + 2)² **y = (x - 2)²**





y = (x - 2)² + 2 **y = (x + 2)² − 2**