

3.0.6. Integración completando cuadrados

Si la expresión x^2+bx+c con $b, c \in \mathbb{R}$ es irreducible, es decir si el discriminante $\Delta = b^2-4ac$ es negativo, entonces es útil completar cuadrados. Para ello, se suma y se resta la expresión

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2$$

Así, se tiene

$$\begin{aligned} x^2 + bx + c &= x^2 + bx + c + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 \\ &= x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c - \left(\frac{b}{2}\right)^2 \\ &= \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + c - \left(\frac{b}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

¿Qué sucede si el coeficiente de x^2 no es 1?. Luego de completar cuadrados se emplea alguno de los métodos anteriores para terminar de resolver la integral.

Ejemplo 3.0.32.

Utilice una sustitución trigonométrica apropiada para resolver las siguientes integrales

$$1. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}} \qquad 2. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + x + 1}} dx \qquad 3. \int \sqrt{x^2 + x + 3} dx$$

3.0.7. Integración de fracciones racionales

Definición 3.0.13 (Fracción racional).

Una fracción racional es una fracción de la forma

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde P y Q son polinomios y $Q(x) \neq 0$.

Ejemplo 3.0.33.

La función $f(x) = \frac{2x+1}{x^3+x^2+6}$ es una fracción racional.

Ejemplo 3.0.34.

La función $f(x) = \frac{\sin x}{x^3+x^2+6}$ no es una fracción racional.

Definición 3.0.14 (Fracción racional propia e impropia).

1. Una fracción racional $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ se llama *propia* si el grado de $P(x)$ es menor que el grado de $Q(x)$.
2. Una fracción racional $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ se llama *impropia* si el grado de $P(x)$ es mayor o igual que el grado de $Q(x)$.

Ejemplo 3.0.35.

La función $f(x) = \frac{2x+1}{x^3+x^2+6}$ es una fracción racional propia.

Ejemplo 3.0.36.

La función $f(x) = \frac{x^3}{x^3+x^2+6}$ es una fracción racional impropia.

Ejemplo 3.0.37.

La función $f(x) = \frac{x^7+3x}{3x^5+4x^2-6}$ es una fracción racional impropia.

3.0.7.1. Integración mediante fracciones simples

Teorema 3.0.11 (Descomposición de una fracción racional en fracciones simples). *Toda fracción racional **propia** se puede descomponer como una suma de fracciones simples de la forma*

1. $\frac{A}{(ax+b)^n}$ donde $n \in \mathbb{N}$, $A, a, b \in \mathbb{R}$.
2. $\frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}$ donde $n \in \mathbb{N}$, $a, b, A, B \in \mathbb{R}$ y ax^2+bx+c es irreducible.

El teorema anterior es útil a la hora de calcular integrales de funciones racionales que se pueden descomponer como sumas de fracciones simples.

Ejemplo 3.0.38.

Calcule las siguientes integrales

1. $\int \frac{2x+1}{(x+1)(x-2)} dx$
2. $\int \frac{x-1}{(x^2+x+1)(x+1)} dx$
3. $\int \frac{x-3}{x^2(x+2)(x+1)} dx$

3.0.7.2. Integración de fracciones impropias

Si $\frac{A(x)}{B(x)}$ es una fracción racional impropia, es posible expresarla en la forma

$$\frac{A(x)}{B(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{B(x)}$$

donde $Q(x)$ es un polinomio llamado **cociente**, $R(x)$ es un polinomio llamado **residuo** y la fracción $\frac{R(x)}{B(x)}$ es propia. Este proceso se llama **algoritmo de la división para polinomios**.

Ejemplo 3.0.39.

Calcule las siguientes integrales. Use el algoritmo de la división.

$$1. \int \frac{x^3}{x^2 + 6} dx \qquad 2. \int \frac{2x^2 + 3x + 1}{x^2 + 4x + 4} dx \qquad 3. \int \frac{x^3 + 1}{x^2 + 3x + 5} dx$$

3.0.8. Integrales de la forma $\int f(\sin x, \cos x) dx$, donde f es racional

En este tipo de integrales hacemos la sustitución

$$u = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \implies \arctan u = \frac{x}{2} \implies dx = \frac{2}{1+u^2} du$$

Por otro lado

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{u}{\sqrt{u^2+1}}, \quad \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{u^2+1}}$$

Como

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha \quad \text{y}$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

Si $\alpha = \frac{x}{2}$ entonces

$$\sin x = \sin\left(2\left(\frac{x}{2}\right)\right) = 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 2 \left(\frac{u}{\sqrt{u^2+1}}\right) \left(\frac{1}{\sqrt{u^2+1}}\right) = \frac{2u}{1+u^2}$$

$$\cos x = \cos\left(2\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{u^2+1}}\right)^2 - \left(\frac{u}{\sqrt{u^2+1}}\right)^2 = \frac{1-u^2}{1+u^2}$$

Resumiendo

$$u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$dx = \frac{2}{1+u^2} du$$

$$\sin x = \frac{2u}{1+u^2}$$

$$\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$$

Ejemplo 3.0.40.

Resuelva las siguientes integrales

1. $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$

2. $\int \frac{\sin x}{\sin x - 4 \cos x} dx$