Capítulo 1

Límites y Continuidad

1.1 Definición y ejemplos

El concepto de límite es la base del cálculo diferencial e integral. Su idea intuitiva es simple, aunque su formulación rigurosa un poco técnica. En palabras, una función f tiene el límite l cuando x tiende a $x = a$, si $f(x)$ está cerca de l cuando x está cerca de a. Dicho de otra manera, si $f(x)$ se acerca a l cuando x se acerca a a. Debemos precisar lo que queremos decir con "estar cerca de", o "acercarse a".

Modificando un poco nuestra definición, diremos que f tiene el límite l en $x = a$, si para que $f(x)$ esté suficientemente cerca de l, basta que x esté suficientemente cerca de a. Ahora tratemos de escribir esto en términos más rigurosos: $f(x)$ suficientemente cerca de l significa que $|f(x) - l| < \varepsilon$, donde ε es un número positivo (tan pequeño como queramos). Antes de establecer la definición rigurosa, debemos notar que al hablar de un límite, no interesa realmente el valor que la función toma en x_0, sino los valores que toma esta en puntos cercanos a dicho punto pero distintos de este.

Definición 1 *Considere la función f definida en un intervalo abierto I, excepto posiblemente en $x = a$. Decimos que f tiene el límite $l \in \mathbb{R}$ cuando x tiende al punto a, si a todo $\varepsilon > 0$, corresponde al menos un $\delta > 0$ tal que*

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

En tal caso se escribe

$$\lim_{x \to a} f(x) = l.$$

Si no existe $l \in \mathbb{R}$ con esta propiedad, se dice que el límite de f en a no existe en $\mathbb{R}$.

Ejemplo 1 *Para $f(x) = c$ tenemos que $\lim_{x \to a} f(x) = c$, para todo a, pues dado $\varepsilon > 0$, se tiene*

$$|f(x) - c| = 0 < \varepsilon,\ \forall x \in \mathbb{R},$$

y entonces cualquier δ funciona.

Ejemplo 2 *Para $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$ (función identidad), se tiene que $\lim_{x \to a} f(x) = a$. En efecto, nótese que*

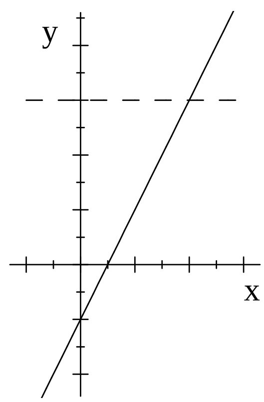
$$|f(x) - a| = |x - a| < \varepsilon,$$

siempre que $0 < |x - a| < \varepsilon$, es decir, $\delta = \varepsilon$ funciona.

Ejemplo 3 *Para* $f(x) = 2x - 1$ *tenemos que* $\lim_{x \to 2} f(x) = 3$. *Para verificar esto note que*

$$|f(x) - 3| = |2x - 4| = 2|x - 2| < \varepsilon,$$

siempre que $|x - 2| < \frac{\varepsilon}{2}$. *Entonces* $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ *funciona en la definición.*



Ejemplo 4 *En general, la función afín definida por* $f(x) = mx+b$ *satisface* $\lim_{x \to a} f(x) = ma+b = f(a)$. *El caso* $m = 0$ *ya fue tratado. Si* $m \neq 0$ *se tiene*

$$|f(x) - f(a)| = |m| \, |x - a| \, ,$$

y consecuentemente, tomando $\delta = \frac{\varepsilon}{|m|}$ *se obtiene*

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Ejemplo 5 *Para* $f(x) = x^2$ *tenemos* $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$. *Para ver esto nótese que*

$$|f(x) - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow x^2 < \varepsilon \Leftrightarrow |x| < \sqrt{\varepsilon}.$$

Entonces $\delta = \sqrt{\varepsilon}$ *satisface la implicación.*

Ejemplo 6 *Para* $f(x) = x^2$ *tenemos* $\lim_{x \to 2} f(x) = 4$. *Verificar esto es un poco más complicado que el ejemplo anterior. Empecemos observando que*

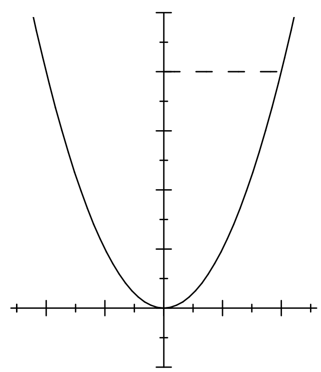
$$|f(x) - 4| = |x + 2| \, |x - 2| \, .$$

La idea es que cuando x *está cerca de* 2, $x + 2$ *es positivo y acotado. Para precisar, si tomamos una primera restricción:* $|x - 2| < 1$, *se sigue que* $-1 < x - 2 < 1$, *y entonces* $3 < x + 2 < 5$. *Luego*

$$|x - 2| < 1 \Rightarrow |x + 2| < 5 \Rightarrow |f(x) - 4| < 5 \, |x - 2| \, .$$

Si además $|x - 2| < \frac{\varepsilon}{5}$, *obtenemos* $|f(x) - 4| < \varepsilon$. *Consecuentemente, al tomar* $\delta = \min\left(1, \frac{\varepsilon}{5}\right)$ *se obtiene que*

$$|x - 2| < \delta \Rightarrow |f(x) - 4| < \varepsilon.$$



Ejemplo 7 *Considere la función* $f(x) = \frac{x}{|x|}$, *para* $x \neq 0$. *Entonces* $\lim_{x\to 0} f(x)$ *no existe. Este hecho es geométricamente obvio, ya que* $f(x) = 1$ *si* $x > 0$, *y* $f(x) = -1$ *para* $x < 0$. *Para demostrarlo procedemos por contradicción, asumiendo que el límite sí existe. Entonces escribimos* $l = \lim_{x\to 0} f(x)$. *Aplicando la definición con* $\varepsilon = 1$ *tenemos que exite* $\delta > 0$ *tal que*

$$0 < |x| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < 1.$$

Pero para $0 < x < \delta$ *obtenemos* $|1 - l| < 1$, *y entonces* $l > 0$. *Similarmente, para* $-\delta < x < 0$ *obtenemos* $|1 + l| < 1$, *de donde* $l < 0$. *Como esto es contradictorio, el límite no existe.*

Ejemplo 8 *De una manera similar se puede demostrar que para la función definida por*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in \mathbb{Q} \\ 0 & si\ x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

no existe el límite $\lim_{x\to 0} f(x)$. *De hecho no existe el límite* $\lim_{x\to a} f(x)$, *para ningún* $a \in \mathbb{R}$. *La demostración se basa en densidad de* $\mathbb{Q}$ *e* $\mathbb{I}$, *y se deja como ejercicio.*

Ejemplo 9 *El límite* $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2}$ *no existe en* $\mathbb{R}$. *En efecto, si existiera, escribimos* $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} = l$. *Entonces para* $\varepsilon = 1$ *existe* $\delta > 0$ *tal que*

$$0 < |x| < \delta \Rightarrow \left| \frac{1}{x^2} - l \right| < 1.$$

Pero para $0 < x < \min\left(\delta, \frac{1}{\sqrt{|l|+1}}\right)$ *tenemos* $\dfrac{1}{x^2} > |l| + 1 \geq l + 1$, *lo que implica* $\left|\frac{1}{x^2} - l\right| > 1$. *Esta contradicción nos permite concluir que el límite no existe en* $\mathbb{R}$.

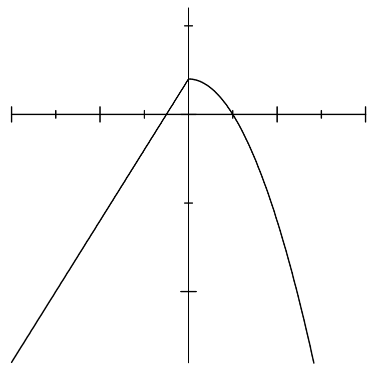
Ejemplo 10 *Para la función definida por*

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & si\ x < 0 \\ 1 - x^2 & si\ x > 0 \end{cases}$$

se tiene $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$. *En efecto, si* $x > 0$ *tenemos que*

$$|f(x) - 1| = x^2 < \varepsilon \text{ cuando } x < \sqrt{\varepsilon}.$$

Si $x < 0$, $|f(x) - 1| = 2|x| < \varepsilon$ *cuando* $|x| < \frac{\varepsilon}{2}$. *Luego debemos tomar* $\delta = \min\left(\frac{\varepsilon}{2}, \sqrt{\varepsilon}\right)$.



En algunos de los ejemplos anteriores, se observa que la función f está definida en a, y que el límite es precisamente $f(a)$. En tales casos decimos que la función es continua en a.

Definición 2 *Se dice que una función f es continua en a, si f está definida en algún intervalo abierto I, con $a \in I$, y además*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Es decir, para cada $\varepsilon > 0$, existe al menos un $\delta > 0$ tal que:

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Nótese que la definición anterior tiene implícitas las siguientes hipótesis: f está definida en a, el límite de f existe en $x = a$, y dicho límite coincide con la imagen de a. Cuando f no es continua en a, se dice que es discontinua en a.

Ejemplo 11 *Como ya vimos, en el caso que f sea una función constante definida por $f(x) = c$, se tiene $\lim_{x \to a} f(x) = c = f(a)$. En otras palabras, las funciones constantes son continuas en cada punto. Similarmente, la función identidad es continua en cada punto $a \in \mathbb{R}$.*

Ejemplo 12 *La función raíz cuadrada, es continua en cada punto $a > 0$. En efecto, nótese que*

$$|f(x) - f(a)| = \left|\sqrt{x} - \sqrt{a}\right| = \frac{|x - a|}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \leq \frac{|x - a|}{\sqrt{a}},$$

para cada $x > 0$. Para $\delta = \min(a, \varepsilon\sqrt{a})$ se obtiene que

$$|x - a| < \delta \Rightarrow 0 < x \text{ y } \frac{|x - a|}{\sqrt{a}} < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

La condición $\delta \leq a$ se impone para que x sea positivo, es decir, pertenezca al dominio de f.

Ejemplo 13 *La función definida por $f(x) = x^2$, es continua en $x = 2$, pues como vimos en un ejemplo previo se tiene $\lim_{x \to 2} f(x) = 4 = f(2)$.*

Definición 3 *Se dice que una función f es continua en un conjunto A, si es continua en cada uno de sus puntos.*

Ejemplo 14 *La función identidad es continua en todo $\mathbb{R}$. Más generalmente, toda función afín, definida por $f(x) = mx + b$, es continua en $\mathbb{R}$.*

Ejemplo 15 *La función raíz cuadrada, es continua en* $I =]0, \infty[$. *En efecto, como vimos en el ejemplo 12 se tiene que* $\lim_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$, *para* $a > 0$.

Ejemplo 16 *La función* f, *definida por* $f(x) = \frac{x}{|x|}$ *es continua en* $\mathbb{R}^*$. *Por ejemplo, para* $a > 0$ *tenemos* $f(x) = 1$ *en* $|x - a| < a$, *y entonces*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} 1 = 1 = f(a).$$

Note que f *es discontinua en el origen, pues* $f(0)$ *no está definida. Es más, aunque se definiera* $f(0)$, f *seguiría siendo discontinua en ese punto, pues el límite no existe.*

En el ejemplo anterior, se utilizó implícitamente el siguiente resultado, el cual dejamos como ejercicio.

Lema 1 *Suponga que* $\lim_{x \to a} f(x) = l$, *y que* $g(x) = f(x)$ *para* $0 < |x - a| < \delta_o$ *(para algún* $\delta_o > 0$*). Entonces* $\lim_{x \to a} g(x) = l$.

1.1.1 Continuidad secuencial

Dado que disponemos de la noción de convergencia de sucesiones y sus propiedades básicas, el estudio de límites de funciones se simplifica notablemente, con respecto a las presentaciones clásicas que el lector puede encontrar en la literatura. La base de tal simplificación es el siguiente teorema.

Teorema 1 *Sea* f *una función definida en el intervalo abierto* I, *y se* $a \in I$. *Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

(i) f *es continua en* a

(ii) Para cada sucesión (x_n) *en* I, *tal que* $x_n \to a$, *se tiene que* $f(x_n) \to f(a)$.

Prueba

Para demostrar que (i) implica (ii), consideremos una sucesión (x_n) en I, tal que $x_n \to a$. Dado $\varepsilon > 0$, la continuidad de f nos dice que existe $\delta > 0$ tal que

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Luego, como $x_n \to a$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - a| < \delta$ para cada $n \geq N$. Se sigue entonces que:

$$n \geq N \Rightarrow |x_n - a| < \delta \Rightarrow |f(x_n) - f(a)| < \varepsilon.$$

Esto demuestra que efectivamente $f(x_n) \to f(a)$.

Recíprocamente, supongamos que f no es continua en $x = a$. Debe existir entonces un $\varepsilon > 0$ tal que:

$$\text{Para cada } \delta > 0, \text{ existe } x_\delta \in I \text{ que cumple } |x - a| < \delta \text{ y } |f(x) - f(a)| \geq \varepsilon.$$

En particular, para $\delta = \frac{1}{n}$ debe existir $x_n \in I$ tal que $|x_n - a| < \frac{1}{n}$ y $|f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon$. Pero entonces $x_n \to a$ y $f(x_n) \nrightarrow f(a)$, es decir, no se cumple (ii). Hemos demostrado así que (ii) implica (i) por medio de la contrapositiva. $\square$

Ejemplo 17 *La función definida por* $f(x) = x^2$, *es continua en todo* $\mathbb{R}$. *En efecto, sea* $a \in \mathbb{R}$ *y sea* (x_n) *una sucesión tal que* $x_n \to a$. *Por las propiedades de convergencia de sucesiones se tiene que* $x_n^2 \to a^2$, *es decir,* $f(x_n) \to f(a)$.

Ejemplo 18 *Toda función polinomial es continua en $\mathbb{R}$. Al igual que en el ejemplo anterior, esto se deduce del resultado correspondiente de sucesiones. Dejamos al lector los detalles.*

Ejemplo 19 *La función definida por $f(x) = \frac{x^2-6x+3}{x-5}$, es continua en $\mathbb{R} - \{5\}$. En efecto, sea $a \neq 5$. Sea (x_n) una sucesión en $\mathbb{R} - \{5\}$, tal que $x_n \to a$. Por las propiedades de las sucesiones se tiene que:*

$$f(x_n) = \frac{x_n^2 - 6x_n + 3}{x_n - 5} \to \frac{a^2 - 6a + 3}{a - 5} = f(a).$$

El teorema anterior fue establecido para funciones continuas. Con una pequeña modificación, se puede utilizar para el cálculo de límites en general. Para esto, establecemos primero un lema de gran utilidad teórica.

Lema 2 *Sea $f : I - \{a\} \to \mathbb{R}$ una función dada. Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

(i) *Existe el límite de f cuando $x \to a$*

(ii) *Existe una función $\widehat{f} : I \to \mathbb{R}$, continua en a, y tal que $\widehat{f}(x) = f(x)$ para cada $x \in I - \{a\}$.*

Prueba
Si se cumple (i), se define $\widehat{f}(a) = \lim\limits_{x \to a} f(x)$, y $\widehat{f}(x) = f(x)$ para cada $x \in I - \{a\}$. Entonces

$$\lim_{x \to a} \widehat{f}(x) = \lim_{x \to a} f(x) = \widehat{f}(a),$$

así que $\widehat{f}$ es continua en a.
Recíprocamente, si se cumple (ii), entonces

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \widehat{f}(x) = \widehat{f}(a),$$

lo que significa que se cumple (i). $\square$

Definición 4 *Cuando una función no es continua en a, pero existe el límite $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, se dice que la discontinuidad en a es evitable. Si por el contrario, el límite no existe, se dice que la discontinuidad es inevitable.*

Ejemplo 20 *La función definida por $f(x) = \frac{x}{|x|}$, tiene una discontinuidad inevitable en el origen, dado que no existe el límite en ese punto.*

Ejemplo 21 *Considere la función definida por $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x-1}$, para cada $x \neq 1$. Nótese que*

$$f(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{x-1} = x - 2, \text{ para } x \neq 1.$$

Se sigue entonces que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -1$. En efecto,

$$|f(x) - (-1)| = |x - 1| < \varepsilon,$$

siempre que $|x - 1| < \varepsilon$. Es decir, tomando $\delta = \varepsilon$ se satisfacen las condiciones de la definición de límite. En este caso, se tiene entonces que f tiene una discontinuidad evitable en $a = 1$. Si se define $f(0) = -1$, se obtiene una función continua en $a = 0$.

La demostración del teorema que sigue no difiere en gran medida de la del teorema anterior. Se deja al lector escribir los detalles.

Teorema 2 *Sea f una función definida en $I-\{a\}$, donde I es un intervalo abierto, y sea $a \in I$. Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

(i) Existe el límite $l = \lim_{x\to a} f(x)$

(ii) Para cada sucesión (x_n) en $I-\{a\}$, tal que $x_n \to a$, se tiene que $f(x_n) \to l$.

Ejemplo 22 *Consideremos la función f definida por $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$, para $x \in \mathbb{R}^+$. Si (x_n) es una sucesión en $\mathbb{R}^*$, tal que $x_n \to 0$, se tiene*

$$f(x_n) = \frac{x_n}{\sqrt{x_n+1}-1} = \frac{x_n\left(\sqrt{x_n+1}+1\right)}{(x_n+1)-1} = \sqrt{x_n+1}+1 \to 2.$$

Se sigue entonces que $\lim_{x\to 0} f(x) = 2$.

Ejemplo 23 *Analicemos la función del ejemplo 8, mediante el uso del teorema anterior. Dado $a \in \mathbb{R}$, considere una sucesión de racionales (x_n), tal que $x_n \to a$, y una sucesión de irracionales (t_n), tal que $t_n \to a$. Se tiene $f(x_n) = 1 \to 1$, y $f(t_n) = 0 \to 0$. Si el límite existiera en a, estas sucesiones deberían tener el mismo límite. Por lo tanto, el límite no existe.*

1.1.2 Propiedades

Para poder desarrollar técnicas de cálculo de límites, vamos a establecer ahora las propiedades básicas de esta teoría. Los teoremas anteriores nos sugieren que no hay mucha diferencia con respecto a las propiedades conocidas sobre convergencia de sucesiones.

1. Si $\lim_{x\to a} f(x) = l$, y c es una constante, entonces $\lim_{x\to a} cf(x) = cl$. En particular, si f es continua en a, se sigue que cf es continua en a.

   En efecto, si $a \neq x_n \to a$ se tiene $f(x_n) \to l$, y luego $cf(x_n) \to cl$. Para el caso en que f es continua en a, se aplica lo anterior con $l = f(a)$.

2. Si $\lim_{x\to a} f(x) = l_1$, y $\lim_{x\to a} g(x) = l_2$, entonces $\lim_{x\to a} [f(x)+g(x)] = l_1 + l_2$. En particular, la suma de funciones continuas es continua.

   Si $a \neq x_n \to a$, se tiene $f(x_n) \to l_1$, y $g(x_n) \to l_2$, y por las propiedades de convergencia de sucesiones se tiene que $f(x_n) + g(x_n) \to l_1 + l_2$. Esto demuestra el resultado.

3. Si $\lim_{x\to a} f(x) = l_1$, y $\lim_{x\to a} g(x) = l_2$, entonces

   $$\lim_{x\to a} [c_1 f(x) + c_2 g(x)] = c_1 l_1 + c_2 l_2,$$

   para todo par de constantes c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$. En particular $\lim_{x\to a} [f(x) - g(x)] = l_1 - l_2$. Además, si f y g son continuas en a, se sigue que $c_1 f + c_2 g$ lo es. La demostración se deja como ejercicio.

4. Las siguientes propiedades son equivalentes:

   (a) $\lim_{x\to a} f(x) = l$

   (b) $\lim_{x\to a} (f(x) - l) = 0$

(c) $\lim\limits_{x\to a} |f(x) - l| = 0.$

Esto es consecuencia directa de la definición. Alternativamente, se puede aplicar el resultado referente a sucesiones.

5. (Ley del emparedado) Suponga $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, para $x \in I - \{a\}$, donde I es el intervalo abierto, con $a \in I$. Sí $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = l$, entonces $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l$.

   En efecto, sea (x_n) una sucesión en $I - \{a\}$, tal que $x_n \to a$. Entonces $f(x_n) \to l$ y $h(x_n) \to l$, y como $f(x_n) \leq g(x_n) \leq h(x_n)$, se sigue que $g(x_n) \to l$ (por la ley del emparedado para sucesiones). Se invita al lector a ensayar una demostración directa, utilizando la definición.

6. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$, entonces $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = |l|$.

   Por una de las consecuencias de la desigualdad triangular se tiene que
$$||f(x)| - |l|| \leq |f(x) - l|.$$
   Esto, unido con las dos propiedades anteriores, nos da el resultado. Se invita al lector a demostrar esta propiedad usando sucesiones.

   El recíproco es falso. Por ejemplo
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ -1 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$
   En este caso tenemos $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = 1$, pero $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ no existe. En el caso $l = 0$ sí es cierto el recíproco (ver los ejercicios)

7. (Ley del producto) Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l_1$, y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l_2$, entonces
$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = l_1 l_2.$$
   En particular, el producto de funciones continuas es continua. La demostración se deja como ejercicio.

8. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l > 0$, entonces existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > \frac{l}{2}$, para $0 < |x - a| < \delta$. En particular, f es positiva para tales valores de x.

   Para demostrar esto, tomamos $\varepsilon = \frac{l}{2}$. Por definición de límite, existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - l| < \frac{l}{2}$ para $0 < |x - a| < \delta$. Pero entonces $f(x) > \frac{l}{2} > 0$, para $0 < |x - a| < \delta$.

   Se invita al lector a enunciar y demostrar el resultado análogo para $l < 0$.

9. (Ley del cociente) Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l_1$, y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l_2 \neq 0$, entonces $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{l_1}{l_2}$. En particular, el cociente de funciones continuas es continua en su dominio.

   Usando la propiedad anterior, existe $\delta > 0$ tal que $g(x) \neq 0$ para $0 < |x - a| < \delta$. Luego, $\frac{f}{g}$ está bien definida en $I - \{a\}$, con $I =]a - \delta, a + \delta[$. Además, si $x_n \to a$ se tiene
$$\left(\tfrac{f}{g}\right)(x_n) = \frac{f(x_n)}{g(x_n)} \to \frac{l_1}{l_2}.$$

Ejemplo 24 *Ya habíamos observado que toda función polinomial es continua en* $\mathbb{R}$*. La propiedad* ***9*** *nos permite concluir que, si* $p(x)$ *y* $q(x)$ *son polinomios, y* $q(a) \neq 0$*, entonces*

$$\lim_{x\to a} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(a)}{q(a)}.$$

Es decir, la función racional $\frac{p(x)}{q(x)}$ *es continua en todo punto de su dominio.*

Ejemplo 25 *Considere la función*

$$f(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Entonces $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$*. Este hecho puede verificarse fácilmente, dado que para* $0 < |x| < 1$ *se tiene* $0 \leq f(x) \leq 2|x|$*. Por la ley del emparedado se obtiene el resultado.*

Ejemplo 26 *Considere la función*

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Entonces g *es continua en* $a = 0$*. En efecto, dado que* $-|x| \leq g(x) \leq |x|$*, por la ley del emparedado se sigue que*

$$\lim_{x\to 0} g(x) = 0 = g(0).$$

Vamos a demostrar que el límite $\lim_{x\to a} g(x)$ *no existe para* $a \neq 0$*. En efecto, si tal límite existiera, entonces existiría el límite* $\lim_{x\to a} f(x)$*, donde*

$$f(x) = \frac{g(x)}{x} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Pero ya sabíamos que tal función no tiene límite en ningún a*.*

Ejemplo 27 *Demostrar que* $\lim_{x\to 0} \sqrt{x+1} = 1$*. Para ver esto note que para todo* $x > -1$ *se tiene*

$$\left|\sqrt{x+1} - 1\right| = \left| \frac{\left(\sqrt{x+1} - 1\right)\left(\sqrt{x+1} + 1\right)}{\sqrt{x+1} + 1} \right| = \frac{|x|}{\sqrt{x+1} + 1} \leq |x|.$$

El resultado se sigue del teorema del emparedado.

Ejemplo 28 *Para calcular el límite* $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 1}$*, no podemos aplicar la regla del cociente directamente, pues los límites en el numerador y denominador son ambos* 0*. Sin embargo, para* $x \neq 1$ *se tiene*

$$\frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 1} = \frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{x+3}{x+1}.$$

Luego

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{x+3}{x+1} = \frac{4}{2} = 2.$$

Ejemplo 29 *Un problema similar se presenta con el límite* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{1-\sqrt{x+1}}$. *En este caso, racionalizando el denominador se tiene:*

$$\frac{x}{1-\sqrt{x+1}}=\frac{x\left(1+\sqrt{x+1}\right)}{1-(x+1)}=-1-\sqrt{x+1}.$$

Luego

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{1-\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to 0}\left(-1-\sqrt{x+1}\right)=-2$$

(Ver el ejercicio 4 para el ultimo paso.

1.1.3 Ejercicios

1. Calcule los siguientes límites, justificando sus pasos con base en las propiedades estudiadas.

$$\lim_{x\to 2}\left(3x^2+1\right),\qquad \lim_{x\to 1}\frac{x^3+4x-5}{x^4+1},\qquad \lim_{x\to -1}\left(x^3+4x^2+2x+3\right)^2,$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+4x-5}{x^4-1},\quad \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x^2+1}\right)^{100},\quad \lim_{x\to 4}\left[\left(\frac{x^2-1}{5}-x\right)^3-\sqrt{x}\right]^2.$$

2. Calcule

$$\lim_{x\to -5}\frac{x^2-25}{x^2+7x+10},\qquad \lim_{x\to 5}\frac{x^2-25}{x^2+7x+10}.$$

3. Demuestre usando la definición la existencia de cada uno de los siguientes límites:

$$\lim_{x\to 2}\left(3x^2+1\right),\quad \lim_{x\to 2}\frac{1}{x},\qquad \lim_{x\to -1}x^3,$$

$$\lim_{x\to -1}\left(x^2+3x\right),\quad \lim_{x\to 3}\frac{x}{x+1},\quad \lim_{x\to a}x^2.$$

4. Si $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=l$, demuestre que $\lim\limits_{x\to a}f(x-a)=l$. Recíprocamente, si $\lim\limits_{x\to a}f(x)=l$, entonces $\lim\limits_{x\to 0}f(x+a)=l$. Use esto para calcular

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{x+4},\qquad \lim_{x\to 0}\sqrt{5x+3}.$$

5. Halle los siguientes límites:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^3-1}\qquad \lim_{x\to 0}\frac{(x+1)^5-1}{x}\qquad \lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x-3}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1+3x}}{x+2x^2}\quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$$

6. Demuestre la unicidad del límite. Esto es, si $\lim\limits_{x\to a}f(x)=l_1$ y $\lim\limits_{x\to a}f(x)=l_2$, entonces $l_1=l_2$.

7. Demuestre con todo detalle que $\lim\limits_{x\to a}f(x)=l$ sii $\lim\limits_{x\to a}|f(x)-l|=0$.

8. Si $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=l$, y $c\neq 0$, demuestre que $\lim\limits_{x\to 0}f(cx)=l$.

9. Use inducción para demostrar que si $\lim_{x\to a} f(x) = l$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces $\lim_{x\to a} (f(x))^n = l^n$. Si además $l \neq 0$, demuestre que $\lim_{x\to a} (f(x))^{-n} = l^{-n}$.

10. Suponga que la función f satisface la desigualdad

$$|f(x) - l| \leq c\,|x-a|\,,\ \text{para } 0 < |x-a| < \delta_0,$$

donde $\delta_0 > 0$. Demuestre que $\lim_{x\to a} f(x) = l$.

11. Si $\lim_{x\to 0} f(x) = l$, demuestre que $\lim_{x\to 0} f(x^2) = 0$. Dé un ejemplo en el que $\lim_{x\to 0} (f(x))^2$ y $\lim_{x\to 0} f(x^2)$ existan, pero $\lim_{x\to 0} f(x)$ no exista.

12. Demuestre que si $\lim_{x\to a} (f(x))^2 = 0$, entonces $\lim_{x\to a} f(x) = 0$.

13. Sea $f : I \to \mathbb{R}$ continua en $a \in I$. Demuestre que f es acotada cerca de a. Es decir, existen $\delta_0 > 0$ y $M > 0$ tales que

$$|f(x)| \leq M,\ \text{para } |x-a| < \delta_0.$$

14. Demuestre que los siguientes límites no existen en $\mathbb{R}$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{|x|}, \quad \lim_{x\to 3} \frac{|x-3|}{x-3}.$$

15. Suponga que $x \in I$, que $\lim_{x\to a} f(x)$ existe, y que:

$$A \leq f(x) \leq B,\ \text{para } x \in I - \{a\}.$$

Demuestre que $A \leq \lim_{x\to a} f(x) \leq B$.

16. Si $\lim_{x\to a} f(x) = l > 0$, demuestre que $\lim_{x\to a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{l}$. Calcule

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+7}-3}{\sqrt{x+2}-2}, \qquad \lim_{x\to 3} \sqrt{\frac{3x+1}{x+2}}, \qquad \lim_{x\to 2} \sqrt{\frac{\sqrt{x+7}-3}{\sqrt{x+2}-2}}.$$

17. Suponga que $|g(x)| \leq c$, para $x \in I - \{a\}$, y que $\lim_{x\to a} f(x) = 0$. Demuestre que $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = 0$.

18. Si $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a} (f(x)+g(x))$ existen, demuestre que $\lim_{x\to a} g(x)$ también existe. Dé un ejemplo en el que $\lim_{x\to a} (f(x)+g(x))$ exista, pero no existan los límites $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a} g(x)$.

19. Si $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a} f(x)g(x)$ existen, ¿se puede concluir que existe $\lim_{x\to a} g(x)$? Demuestre o dé un contraejemplo.

20. Considere la función $f : \mathbb{R}^+_* \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt[n]{x}$, con $n \in \mathbb{N}$. Demuestre que

$$|f(x) - f(a)| = \frac{|x-a|}{(\sqrt[n]{x})^{n-1} + (\sqrt[n]{x})^{n-2}\sqrt[n]{a} + \cdots + (\sqrt[n]{a})^{n-1}} \leq \frac{|x-a|}{(\sqrt[n]{a})^{n-1}},$$

para $a, x > 0$. Concluya que f es continua.

21. Considere la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt[n]{x}$, con $n \in \mathbb{N}$ impar. Demuestre que f es continua.

22. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuas, tales que $f(r) = g(r)$ para cada $r \in \mathbb{Q}$. Demuestre que $f = g$.

23. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, y suponga que existe $\lim_{x\to 0} f(x) = l$.

    (a) Demuestre que $f(0) = 0$, y que $f(-x) = -f(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}$.

    (b) Demuestre que $l = 0$, y que f es continua en todo $\mathbb{R}$.

    (c) Demuestre por inducción que $f(nx) = nf(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$.

    (d) Usando lo anterior, concluya que $f(x) = ax$ para cada $x \in \mathbb{Q}$, donde $a = f(1)$.

    (e) Usando el ejercicio 22, concluya que $f(x) = ax$ para cada $x \in \mathbb{R}$.

1.2 Límites laterales

Si $f :]a, b[\to \mathbb{R}$, podemos hablar del límite cuando x se acerca al punto a "por la derecha". Decimos que tal límite existe y es l si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$a < x < a + \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

En tal caso escribimos

$$\lim_{x\to a+} f(x) = l.$$

Similarmente podemos hablar del límite cuando x tiende a b por la izquierda, el cual se denota

$$\lim_{x\to b-} f(x).$$

Si f está definida en $I - \{a\}$, donde I es un intervalo abierto que contiene al punto a, los límites laterales pueden existir ambos en a.

Ejemplo 30 *Si $f(x) = \frac{x}{|x|}$, f está definida en todo $\mathbb{R}^*$. Para $x > 0$ tenemos $f(x) = 1$, así que*

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = 1.$$

Similarmente $\lim_{x\to 0-} f(x) = -1$.

Ejemplo 31 *Para*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in \mathbb{Q} \\ 0 & si\ x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

no existe el límite $\lim_{x\to 0+} f(x)$, y tampoco $\lim_{x\to 0-} f(x)$. De hecho no existe $\lim_{x\to a+} f(x)$ ni $\lim_{x\to a-} f(x)$, para ningún $a \in \mathbb{R}$. La demostración se basa en densidad de $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$, y se deja como ejercicio.

Ejemplo 32 *Para*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & si\ x > 0 \\ x & si\ x < 0 \end{cases}$$

tenemos que $\lim_{x\to 0-} f(x) = 0$, pero $\lim_{x\to 0+} f(x)$ no existe en $\mathbb{R}$.

Nota: Si $\lim_{x\to a} f(x) = l$ existe, entonces como

$$a < x < a + \delta \Rightarrow 0 < |x - a| < \delta$$

se sigue que el límite $\lim_{x\to a+} f(x)$ también existe y es igual a l, y similarmente $\lim_{x\to a-} f(x) = l$. Recíprocamente, si los límites laterales en a existen y son iguales, entonces $\lim_{x\to a} f(x)$ también existe, y coincide con el valor común de los límites laterales. Escribimos esto como un terorema.

Teorema 3 *Sea f definida en $I - \{a\}$. Entonces el límite de f existe en a si, y solo si, los límites laterales existen y son iguales. En tal caso se tiene*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a-} f(x).$$

Ejemplo 33 *Para la función*

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & si\ x < 0 \\ x^2 + x & si\ x > 0 \end{cases}$$

tenemos que $\lim_{x\to 0+} f(x) = 0$, *mientras que* $\lim_{x\to 0-} f(x) = 1$. *Luego* $\lim_{x\to 0} f(x)$ *no existe.*

Ejemplo 34 *Para la función*

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & si\ x < 0 \\ x^2 + 1 & si\ x > 0 \end{cases}$$

tenemos $\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0-} f(x) = 1$, *así que* $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$.

Finalizamos esta sección estableciendo el análogo del teorema 2 para límites laterales. Para simplificar el uso, utilizaremos sucesiones monótonas.

Teorema 4 *Sea f una función definida en $]a, b[$. Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

(i) Existe el límite $l = \lim_{x\to a+} f(x)$ *en* $\mathbb{R}$

(ii) Para cada sucesión decreciente (x_n) *en* $]a, b[$, *tal que* $x_n \to a$, *se tiene que* $f(x_n) \to l$.

Demostración
Demostraremos que (ii) implica (i), utilizando la contrapositiva. En efecto, supongamos que (i) es falso. Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$, existe $x \in]a, a+\delta[$ tal que $|f(x) - l| \geq \varepsilon$. En particular, para $\delta_0 = \min(b-a, 1)$ existe $x_1 \in]a, b[$ tal que $|f(x_1) - l| \geq \varepsilon$. Por recurrencia, habiendo definido x_n, tomamos $\delta_n = \min\left(x_n - a, \frac{1}{n+1}\right)$. Entonces existe $x_{n+1} \in]a, a+\delta_n[$ tal que $|f(x_{n+1}) - l| \geq \varepsilon$. Nótese que en particular $x_{n+1} < x_n$, y $0 < x_{n+1} - a < \frac{1}{n+1} \to 0$. La sucesión (x_n) es entonces decreciente, y $f(x_n) \nrightarrow l$. La otra implicación se deja como ejercicio. $\square$

Se invita al lector a enunciar el resultado análogo para límites por la izquierda.

Ejemplo 35 *Para*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & si\ x > 0 \\ x & si\ x \leq 0 \end{cases}$$

tenemos que $\lim_{x\to 0+} f(x)$ *no existe en* $\mathbb{R}$, *y entonces tampoco existe* $\lim_{x\to 0} f(x)$. *En efecto, sea* $x_n > 0$ *tal que* $x_n \to 0$. *Se tiene* $f(x_n) = \frac{1}{x_n} \to \infty$, *así que esta sucesión diverge. Por el teorema anterior, el límite lateral no existe en* $\mathbb{R}$.

1.2.1 Ejercicios

1. Demuestre con detalle que si $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = \lim\limits_{x\to a-} f(x) = l$, entonces $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$.

2. Demuestre que $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0-} f(-x)$. Más precisamente, si uno de estos límites existe, entonces el otro también, y ambos coinciden.

3. Demuestre que $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} f(|x|) = \lim\limits_{x\to 0} f(x^2)$, en el sentido expresado en el ejercicio anterior.

4. Demuestre usando la definición de límites laterales, que
$$\lim_{x\to 0+} \sqrt{x} = 0, \qquad \lim_{x\to 1-} \sqrt[4]{1-x} = 0.$$

5. Halle los siguientes límites:
$$\lim_{x\to 0+} \tfrac{x+1}{1+\sqrt{x}}, \qquad \lim_{x\to -2-} \tfrac{|2x+4|}{x+2}$$

6. Para
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$
demuestre que no existe $\lim\limits_{x\to a+} f(x)$ ni $\lim\limits_{x\to a-} f(x)$, para ningún $a \in \mathbb{R}$.

7. Estudie la existencia de $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, para:
$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x \geq 0, \\ 2x-1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

8. Estudie la existencia del límite de las siguientes funciones cuando x tiende a 1:
$$f(x) = \begin{cases} x^2-1 & \text{si } x < 1 \\ 1-x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}, \qquad g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 1 \\ 2x+1 & \text{si } x \geq 1 \\ 17 & \text{si } x = 1 \end{cases}.$$

9. Halle las constantes A y B para que sea continua la función
$$f(x) = \begin{cases} -x^2+3 & \text{si } x < 0, \\ Ax+B & \text{si } 0 \leq x < 2, \\ x & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$$
Trace la gráfica de f.

10. Complete la demostración del teorema 4.

11. Enuncie y demuestre el resultado análogo al teorema 4 para límites por la izquierda.

12. Si f está definida en $]a, a+c[$, entonces se puede definir
$$g :]a-c, a+c[- \{a\} \to \mathbb{R}$$
por $g(x) = f(a + |x-a|)$. Verifique que esta definición tiene sentido, es decir que $a + |x-a| \in]a, a+c[$ para cada x en el dominio de g. Demuestre que
$$\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a} g(x)$$
en el sentido que si uno de estos límites existe, entonces el otro también existe, y son iguales. Interprete geométricamente.

1.3 Continuidad de funciones trascendentes

1.3.1 Continuidad de la exponencial

Recordemos que la función exponencial de base $a > 1$ es estrictamente creciente en todo $\mathbb{R}$. Además, es conocido que si $x_n \to x$, entonces $a^{x_n} \to a^x$. Este hecho demuestra que la función exponencial de base a, es continua en cada $x \in \mathbb{R}$. Con el fin de no asumir muchas cosas, vamos a demostrar esto en forma directa. Para $n \in \mathbb{N}$, como $\sqrt[n]{a} > 1$ se tiene que $\varepsilon_n = \sqrt[n]{n} - 1 > 0$. La desigualda de Bernoulli nos da:

$$a = (1 + \varepsilon_n)^n \geq 1 + n\varepsilon_n > n\varepsilon_n,$$

de donde se sigue que $\varepsilon_n < \frac{a}{n}$, y consecuentemente

$$1 < \sqrt[n]{a} < 1 + \frac{a}{n}.$$

Dado $\varepsilon > 0$, la arquimedianidad de $\mathbb{R}$ nos permite escoger $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{a}{n} < \varepsilon$. Tenemos entonces:

$$0 < x < \tfrac{1}{n} \Rightarrow 1 < a^x < a^{\frac{1}{n}} < 1 + \tfrac{a}{n} < 1 + \varepsilon \Rightarrow |a^x - 1| < \varepsilon.$$

Esto demuestra que $\delta = \frac{1}{n}$ funciona en la definición de límite por la derecha, así que

$$\lim_{x \to 0+} a^x = 1.$$

Ahora, por las propiedades de los límites laterales se sigue que

$$\lim_{x \to 0-} a^x = \lim_{x \to 0+} a^{-x} = \lim_{x \to 0+} \tfrac{1}{a^x} = 1.$$

Concluimos entonces que la función exponencial de base $a > 1$, es continua en el origen. En general, para $x \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\lim_{t \to x} a^t = \lim_{t \to x} a^x a^{t-x} = a^x \lim_{u \to 0} a^u = a^x,$$

así que la función exponencial de base $a > 1$ es continua en todo $x \in \mathbb{R}$. Consideremos ahora una función exponencial de base a, con $0 < a < 1$. Como

$$a^x = \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^x},$$

y la función exponencial de base $\frac{1}{a}$ es continua, se sigue que

$$\lim_{t \to x} a^t = \lim_{t \to x} \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^t} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^x} = a^x,$$

demostrando así que la función exponencial de base $a \in]0, 1[$ es también continua.

Ejemplo 36 *Para calcular el límite* $\lim_{x \to -1} e^{2x}$*, podemos verlo como un producto:*

$$\lim_{x \to -1} e^{2x} = \lim_{x \to -1} e^x e^x = e^{-1} e^{-1} = e^{-2}.$$

También se puede ver como el límite de una exponencial de base e^2 *:*

$$\lim_{x \to -1} e^{2x} = \lim_{x \to -1} \left(e^2\right)^x = \left(e^2\right)^{-1} = e^{-2}.$$

Alternativamente, se puede usar el ejercicio 8, sección 1.1.3. Se invita al lector a escribir los detalles.

Ejemplo 37 *De acuerdo con el ejercicio 11 de la sección 1.1.3, y la ley del producto se tiene:*

$$\lim_{x \to 0} e^{x^2 + 3x + 1} = \lim_{x \to 0} e^{x^2} e^{3x} e = e.$$

1.3.2 Continuidad del logaritmo

Como inversa de la función exponencial, la función logarítmica hereda la continuidad. Este hecho se deduce de un resultado general, pero aquí lo haremos directamente. Para simplificar, tomemos el logaritmo natural

$$\ln :]0, \infty[\to \mathbb{R}, \text{ definida por } \ln x = t \Leftrightarrow e^t = x.$$

Como la exponencial es estrictamente creciente, el logaritmo lo es. Vamos a demostrar que ln es continua en cada $b > 0$. Para esto, sea (x_n) una sucesión decreciente que converge a $b > 0$. En particular se tiene $b \le x_{n+1} \le x_n \le x_0$ para cada n, y luego $\ln b \le \ln x_{n+1} \le \ln x_n \le \ln x_0$. Esto demuestra que la sucesión $(\ln x_n)$ es decreciente y acotada, y por el teorema de Weierstrass es convergente. Sea $c = \lim \ln x_n$. Por la continuidad de la exponencial, se tiene que

$$e^c = \lim e^{\ln x_n} = \lim x_n = b,$$

así que $c = \ln b$. Hemos demostrado entonces que $\ln x_n \to \ln b$, siempre que $x_n \to b$ en forma decreciente. De acuerdo con el teorema 4, se tiene que $\lim\limits_{x \to b+} \ln x = \ln b$. Para el límite por la izquierda, la demostración es idéntica, excepto que ahora se toma (x_n) creciente. Obtenemos así que

$$\lim_{x \to b} \ln x = \ln b,$$

como queríamos demostrar. Para el caso general se tiene, por las leyes del cociente y el cambio de base,

$$\lim_{x \to b} \log_a x = \lim_{x \to b} \frac{\ln x}{\ln a} = \frac{\ln b}{\ln a} = \log_a b.$$

Esto demuestra que la función logarítmica de base a es continua en todo $(0, \infty)$.

Ejemplo 38 *Para calcular el límite*

$$\lim_{x \to 0} \log_5 \left(\frac{(x+3)(2x+7)}{x+11} \right)$$

podemos utilizar las propiedades de los logaritmos, obteniendo

$$\lim_{x \to 0} \left[\log_5 (x+3) + \log_5 2 + \log_5 \left(x + \tfrac{7}{2} \right) - \log_5 (x+11) \right],$$

y por el ejercicio 4 de la seccion 1.1.3 se obtiene

$$\lim_{x \to 0} \log_5 \left(\frac{(x+3)(2x+7)}{x+11} \right) = \log_5 3 + \log_5 2 + \log_5 \tfrac{7}{2} - \log_5 11 = \log_5 \frac{21}{11}.$$

Alternativamente, si $x_n \to 0$ se tiene que

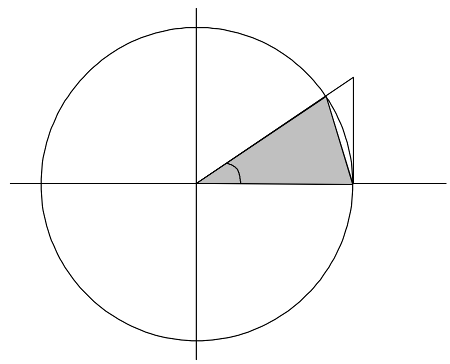
$$\frac{(x_n+3)(2x_n+7)}{x_n+11} \to \frac{21}{11},$$

y por la continuidad del logaritmo de base 5, *se obtiene el resultado.*

Ejemplo 39 *La función definida por $f(x) = \ln(x+3)$, es continua en todo su dominio $D =]-3, \infty[$.*

1.3.3 Continuidad de las trigonométricas

Dado que nuestra "definición" de las funciones trigonométricas es puramente geométrica, no es de extrañarse que la continuidad de dichas funciones se establezca partiendo del siguiente dibujo:



Dado $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$ como en el dibujo, el área del triángulo sombreado es $\frac{\operatorname{sen}\theta}{2}$, el área del sector circular correspondiente es $\frac{\theta}{2}$, y el área del triángulo grande es $\frac{\tan\theta}{2}$. Entonces

$$\operatorname{sen}\theta \leq \theta \leq \tan\theta, \ \forall\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[. \tag{1.1}$$

Como $\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta$, se sigue que

$$|\operatorname{sen}\theta| \leq |\theta|, \ \text{para} \ |\theta| < \frac{\pi}{2}.$$

Por la ley del emparedado se sigue que

$$\lim_{\theta\to 0} \operatorname{sen}\theta = 0.$$

Ahora como

$$0 \leq 1 - \cos\theta = \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{1+\cos\theta} \leq \operatorname{sen}^2\theta, \ \text{para} \ |\theta| < \frac{\pi}{2},$$

se sigue otra vez de la ley del emparedado que $\lim\limits_{\theta\to 0}(1-\cos\theta) = 0$. Esto es

$$\lim_{\theta\to 0} \cos\theta = 1.$$

Lo anterior demuestra que las funciones *seno* y *coseno* son continuas en el origen. Las fórmulas de suma de ángulos se pueden usar para obtener la continuidad en cualquier punto $a \in \mathbb{R}$. Por ejemplo, dado que

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(x-a+a) = \operatorname{sen}(x-a)\cos a + \cos(x-a)\operatorname{sen} a,$$

se sigue que

$$\lim_{x\to a} \operatorname{sen} x = \cos a \lim_{x\to a} \operatorname{sen}(x-a) + \operatorname{sen} a \lim_{x\to a} \cos(x-a).$$

Haciendo el cambio $t = x-a$ se tiene que $\lim\limits_{x\to a} \operatorname{sen}(x-a) = \lim\limits_{t\to 0} \operatorname{sen} t = 0$, y similarmente $\lim\limits_{x\to a} \cos(x-a) = 1$. Luego

$$\lim_{x\to a} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a, \ \forall a \in \mathbb{R}.$$

Similarmente se obtiene la continuidad de la función *coseno.*

La ley del cociente para funciones continuas, implica que las demás funciones trigonométricas (tangente, cotangente, secante, cosecante) son continuas en sus respectivos dominios. Para finalizar esta sección, estudiaremos el límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}.$$

Tanto el numerador como el denominador tienden a cero, así que no se puede evaluar directamente. Pero por la desigualdad (1.1) se tiene que

$$1 \le \frac{x}{\operatorname{sen} x} \le \frac{1}{\cos x}, \ \forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[,$$

o equivalentemente

$$\cos x \le \frac{\operatorname{sen} x}{x} \le 1, \ \forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[.$$

Como tanto la función $\cos x$ como la función $\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ son pares, la desigualdad también es válida en $\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$. Luego, por la ley del emparedado obtenemos que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

Ejemplo 40 *Para calcular el límite* $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x}$ *vemos que*

$$\frac{1-\cos x}{x} = \frac{1-\cos^2 x}{x\,(1+\cos x)} = \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x},$$

y entonces

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 1 \cdot \frac{0}{1+1} = 0.$$

Ejemplo 41 *De la misma forma se obtiene*

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2 \cdot \frac{1}{1+\cos x} = 1^2 \cdot \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

Ejemplo 42 *La función definida por* $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$, *es continua en todo punto* $a \neq 0$, *pues es cociente de funciones continuas. La discontinuidad en el origen es evitable, pues el límite existe en dicho punto.*

1.3.4 Ejercicios

1. Calcule los siguientes límites:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos x}{\left(\tan^2 x + 3\right)^2}, \quad \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{1-\tan x}{\operatorname{sen} x - \cos x}, \quad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cot x}, \quad \lim_{\theta\to \pi} \theta \sec \theta.$$

2. Demuestre usando la definición la existencia del límite:

$$\lim_{x\to 0} x \operatorname{sen} \tfrac{1}{x}, \qquad \lim_{x\to 0} \tfrac{x}{1+\cos x}.$$

3. Calcule los siguientes límites, usando un cambio de variable lineal.

$$\lim_{x\to \pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x-\pi}, \quad \lim_{x\to \pi} \frac{1-\cos(x-\pi)}{(x-\pi)^2}.$$

4. Halle los siguientes límites:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{\operatorname{sen} x} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{sen} x} \qquad \lim_{\theta\to 0}\frac{\theta\tan\theta}{\operatorname{sen}\theta}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{x} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)^2}{x} \qquad \lim_{\theta\to 0}\frac{\sec\theta-1}{\theta\sec\theta}$$

5. Demuestre que si $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=l$, y $c\neq 0$, entonces $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(cx)}{x}=cl$. Use esto para calcular

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 2x}{x}, \quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{x}, \quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}.$$

6. Halle los siguientes límites:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} 3x} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 2x}{x} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 3x}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\operatorname{sen} x}{1-\cos x} \qquad \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen} x}{h} \qquad \lim_{x\to 1}\frac{\operatorname{sen}\left(x^2-1\right)}{x-1}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} 3x} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x+2x}{x+x^2} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{x^2(3+\operatorname{sen} x)}{(x+\operatorname{sen} x)^2}$$

7. Considere la función

$$f(x)=\begin{cases}\operatorname{sen} x & \text{si } x\in\mathbb{Q},\\ 1-\cos x & \text{si } x\notin\mathbb{Q}.\end{cases}$$

Demuestre que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$.

8. Use el teorema del emparedado para demostrar que:

$$\lim_{x\to 0} x\operatorname{sen}\tfrac{1}{x}=0, \qquad \lim_{x\to 0}\tfrac{x}{1+\cos x}, \qquad \lim_{x\to 0}\tfrac{x^2\cos\frac{1}{x}}{\operatorname{sen} x}=0.$$

9. Demuestre que los siguientes límites no existen en $\mathbb{R}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{x}, \qquad \lim_{x\to 0}\operatorname{sen}\frac{1}{x}.$$

10. Use la ley del emparedado para deducir la existencia del límite

$$\lim_{x\to 0} x^2\left(\operatorname{sen}\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right).$$

11. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $f(x+y)=f(x)f(y)$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$. Suponga que f no es idénticamente nula, y que existe $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=l$.

    (a) Demuestre que $f(0)=1$, y que $f(x)>0$ para cada $x\in\mathbb{R}$.

    (b) Demuestre que $l=1$, y f es continua en todo $\mathbb{R}$.

    (c) Demuestre usando inducción que $f(nx)=[f(x)]^n$ para cada $x\in\mathbb{R}$ y $n\in\mathbb{N}$.

    (d) Usando lo anterior, concluya que $f(x)=a^x$ para cada $x\in\mathbb{Q}$, donde $a=f(1)$.

    (e) Usando el ejercicio 22 de la sección 1.1.3, concluya que $f(x)=a^x$ para cada $x\in\mathbb{R}$.

1.4 Límites infinitos y al infinito

1.4.1 Límites infinitos

En las secciones anteriores, vimos los ejemplos como

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x},$$

los cuales no existen como límites reales, pero aún así pueden considerarse como existentes en el sentido ampliado que expondremos a continuación. Así como se escribe $x_n \to \infty$ cuando una sucesión diverge a infinito, escribiremos $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ si la función f crece indefinidamente al acercarse x al punto a.

Definición 5 *Sea f definida en $I - \{a\}$, donde I es un intervalo abierto que contiene al punto a. Decimos que f tiene límite ∞ cuando x tiende al punto a, si para todo $M > 0$ existe $\delta > 0$ tal que*

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > M. \tag{1.2}$$

En tal caso escribimos $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$. Similarmente, si reemplazamos (1.2) por

$$a < x < a + \delta \Rightarrow f(x) > M,$$

obtenemos la definición de $\lim_{x\to a+} f(x) = \infty$, y si lo reemplazamos por

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < -M,$$

obtenemos la definición de $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$.

El lector puede escribir como ejercicio, las definiciones correspondientes de $\lim_{x\to a-} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to a+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to a-} f(x) = -\infty$.

Ejemplo 43 *Para $f(x) = \frac{1}{x}$ tenemos $\lim_{x\to 0+} f(x) = \infty$. En efecto, dado $M > 0$, basta con tomar $\delta = \frac{1}{M}$. Tenemos*

$$0 < x < \delta \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x} > \frac{1}{\delta} = M.$$

Ejemplo 44 *Para $f(x) = \frac{1}{x^2}$ tenemos $\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$. En efecto, dado $M > 0$, basta con tomar $\delta = \frac{1}{\sqrt{M}}$. Tenemos*

$$0 < |x| < \delta \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x^2} > \frac{1}{\delta^2} = M.$$

Ejemplo 45 $\lim_{x\to 1-} \frac{1}{x-1} = -\infty$. *Dado $M > 0$ podemos tomar $\delta = \frac{1}{M}$, y obtenemos*

$$1 - \delta < x < 1 \Rightarrow -\delta < x - 1 < 0 \Rightarrow \frac{1}{x-1} < -\frac{1}{\delta} = -M.$$

Ejemplo 46 *Para $f(x) = \dfrac{5x^3 + 4}{(x-2)^2}$ tenemos $\lim_{x\to 2} f(x) = \infty$. Para ver esto observamos primero que $f(x) > 0$ para $x > 0$, y que*

$$\lim_{x\to 2} \frac{1}{f(x)} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)^2}{5x^3 + 4x} = 0,$$

por las propiedades de los límites finitos. Dado $M > 0$, *tomando* $\varepsilon = \frac{1}{M}$ *se sigue que existe* $\delta > 0$ *tal que*

$$0 < |x - 2| < \delta \Rightarrow \frac{1}{f(x)} < \varepsilon \Rightarrow f(x) > \frac{1}{\varepsilon} = M.$$

Este mismo argumento demuestra el siguiente resultado general:

Teorema 5 *Sea* f *definida en* $I - \{a\}$, *con* $f(x) > 0$ *para cada* $x \in I - \{a\}$.. *Entonces*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \Leftrightarrow \lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = 0.$$

El teorema se puede aplicar también con límites laterales, y con límites que dan $-\infty$, en este último caso pidiendo que $f(x) < 0$. La demostración se deja como ejercicio.

Ejemplo 47 *Para* $f(x) = \frac{1-\sqrt{x+1}}{x^2}$ *tenemos* $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = -\infty$, *pues*

$$f(x) = \frac{\left(1 - \sqrt{x+1}\right)\left(1 + \sqrt{x+1}\right)}{x^2\left(1 + \sqrt{x+1}\right)} = \frac{-1}{x\left(1 + \sqrt{x+1}\right)},$$

así que

$$\lim_{x \to 0+} \frac{1}{f(x)} = 0, \text{ y } f(x) < 0, \text{ para todo } x > 0.$$

Nota: Las propiedades del cálculo de límites finitos siguen siendo válidas para límites infinitos, siempre y cuando no haya indefiniciones.

Ejemplo 48 *Para* $f(x) = \frac{4x+1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ *se tiene*

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0+} \left(4\sqrt{x} + 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \lim_{x \to 0+} \left(4\sqrt{x} + 1\right) + \lim_{x \to 0+} \frac{1}{\sqrt{x}} = 1 + \infty = \infty.$$

Ejemplo 49 *El límite* $\lim\limits_{x \to 1-} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x^2-1}\right)$ *es de la forma* $-\infty + \infty$, *lo cual es indeterminado. Combinando las fracciones:*

$$\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x^2-1} = \frac{x}{(x+1)(x-1)},$$

y entonces $\lim\limits_{x \to 1-} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x^2-1}\right) = \frac{1}{2} \cdot (-\infty) = -\infty.$

1.4.2 Límites al infinito

Sea f definida en un intervalo de la forma $]a, \infty[$. Decimos que el límite de f cuando x tiende a infinito existe y es l, si para todo $\varepsilon > 0$ existe $N > a$ tal que

$$x > N \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

En tal caso escribimos $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = l$. Decimos que el límite es infinito si para todo $M > 0$ existe $N > a$ tal que

$$x > N \Rightarrow f(x) > M.$$

En tal caso escribimos $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$. Similarmente se define el límite $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

Ejemplo 50 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0$. *En efecto, dado* $\varepsilon > 0$ *se puede tomar* $N = \dfrac{1}{\varepsilon}$. *Entonces*

$$x > N \Rightarrow \left| \frac{1}{x} - 0 \right| = \frac{1}{x} < \varepsilon.$$

Ejemplo 51 $\lim\limits_{x\to\infty} x = \infty$. *Dado* $M > 0$, *tome* $N = M$.

Ejemplo 52 $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 = \infty$. *Tome* $N = \sqrt{M}$.

Ejemplo 53 $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x} = \infty$. *Tome* $N = M^2$.

Ejemplo 54 $\lim\limits_{x\to\infty} \left(x^2 - x\right)$ *es de la forma indeterminada* $\infty - \infty$. *Pero* $x^2 - x = x^2 \left(1 - \frac{1}{x}\right)$, *y por los ejemplos anteriores y las propiedades de los límites tenemos*

$$\lim_{x\to\infty} \left(x^2 - x\right) = \lim_{x\to\infty} x^2 \left(1 - \frac{1}{x}\right) = \infty \cdot (1 - 0) = \infty.$$

Las propiedades para límites cuando $x \to a$, se cumplen para límites al infinito, con obvias modificaciones. Por ejemplo, si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = l$ y $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = m$, se sigue que $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) + g(x)) = l + m$

Ejemplo 55 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+1}{x-1} = +\infty$, *pues*

$$\frac{x^2+1}{x-1} = \frac{x\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{1 - \frac{1}{x}},$$

y las propiedades de límites.

Ejemplo 56 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+1}{3x^2+x-1} = \dfrac{1}{3}$, *pues*

$$\frac{x^2+1}{3x^2+x-1} = \frac{x^2\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(3 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{3 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}},$$

y las propiedades de límites.

Ejemplo 57 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{7x^2+100x}{x^3+x^2+4} = 0$, *pues*

$$\frac{7x^2+100x}{x^3+x^2+4} = \frac{7 + \frac{100}{x}}{x\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{4}{x^3}\right)}.$$

Ejemplo 58 *Para* $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ *tenemos*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\infty + \infty} = 0.$$

1.4.3 Ejercicios

1. Demuestre que $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{-n} = 0$, para $n \in \mathbb{N}$.

2. Demuestre usando la definición que $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^2-1} = 0$.

3. Demuestre que $\lim\limits_{x\to\infty} (-1)^{[\![x]\!]}$ no existe.

4. Estudie los límites
$$\lim_{x\to 2} \frac{1}{x^2-4}, \qquad \lim_{x\to 1} \frac{(-1)^{[\![x]\!]}}{x-1}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{1+2+\cdots+[\![x]\!]}{x^2}.$$

5. Demuestre el teorema 5. Demuestre además que si $f(x) < 0$ en $I - \{a\}$, entonces
$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = 0.$$
Enuncie y demuestre propiedades análogas para límites laterales.

6. Suponga que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$. Demuestre que
$$\lim_{x\to a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x\to a} f(x)g(x) = +\infty.$$
Dé ejemplos en los que $\lim\limits_{x\to a} (f(x) - g(x))$ sea $0, 1, \infty, -\infty$, o no exista, y lo mismo con $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$.

7. Suponga que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$. Demuestre que
$$\lim_{x\to a} (f(x) - g(x)) = +\infty, \quad \lim_{x\to a} f(x)g(x) = -\infty.$$
Dé ejemplos en los que $\lim\limits_{x\to a} (f(x) + g(x))$ sea $0, 1, \infty, -\infty$, o no exista, y lo mismo con $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$.

8. Suponga que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l \in \mathbb{R}$. Demuestre que
$$\lim_{x\to a} (f(x) + g(x)) = +\infty.$$
Si $l > 0$, demuestre que $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = +\infty$. Si $l < 0$, demuestre que $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = -\infty$.

9. Demuestre que $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(\frac{1}{x})$, en el sentido que si uno de ellos existe o es infinito, entonces el otro también, y ambos coinciden. De la misma forma demuestre que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(-x)$, $\lim\limits_{x\to 0-} f(\frac{1}{x}) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

10. Si $f(x) \le g(x) \le h(x)$, $\forall x > a$, y si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} h(x) = l$, demuestre que $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = l$.

11. Suponga que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, y que $g(x) \ge f(x)$, para $0 < |x-a| < \delta$. Demuestre que $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$. Enuncie y demuestre el resultado análogo para $x \to \infty$.

12. Sea f definida en $I - \{a\}$, con $a \in I$. Demuestre que son equivalentes:

    (a) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$.

(b) Para toda sucesión (x_n) en $I - \{a\}$, tal que $x_n \to a$, se tiene que $f(x_n) \to +\infty$.
Enuncie el resultado análogo para límites laterales, y para cuando el límite es $-\infty$.

13. Sea f definida en $]c, \infty[$. Demuestre que son equivalentes:

(a) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = l$.

(b) Para toda sucesión (x_n) que diverge a ∞, se tiene que $f(x_n) \to l$
Enuncie el resultado análogo para $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, y para cuando el límite es $+\infty$ ó $-\infty$.

1.5 Algunos teoremas sobre continuidad

En esta sección estudiamos algunos teoremas sobre funciones continuas, de estrema importancia en cálculo. El primero de ellos tiene que ver con la composición de funciones continuas.

1.5.1 Composición de funciones continuas

Teorema 6 *Si f es continua en a, y g es continua en $b = f(a)$, entonces la composición $g \circ f$ es continua en a.*

Prueba
Sea (x_n) una sucesión que converge al punto a. Como f es continua en a, se sigue que $f(x_n) \to f(a)$. Luego, como g es continua en $f(a)$ se tiene $g(f(x_n)) \to g(f(a))$. $\square$

Ejemplo 59 *Para calcular el límite*

$$\lim_{x \to 2} \cos\left(x^2 + 3x - 10\right)$$

vemos que $f(x) = x^2 + 3x - 10$ es continua en $x = 2$, con $f(2) = 0$, y como coseno es continua en el origen, tenemos

$$\lim_{x \to 2} \cos\left(x^2 + 3x - 10\right) = \cos 0 = 1.$$

Ejemplo 60 *Para calcular el límite*

$$\lim_{x \to 1} \frac{\operatorname{sen}\left(x^2 - 1\right)}{x^2 - 1}$$

usamos $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$. Note que g no es continua en el origen, pero la discontinuidad es evitable. Más precisamente, podemos tomar

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

la cual es continua en el origen. Luego

$$\lim_{x \to 1} \frac{\operatorname{sen}\left(x^2 - 1\right)}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1} g(f(x)) = g(f(1)) = g(0) = 1.$$

Ejemplo 61 *Para el límite $\lim\limits_{x \to 1} \sqrt{\frac{x-1}{x^2-1}}$ tenemos $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$, $g(x) = \sqrt{x}$. En este caso f no es continua en $x = 1$, pero el límite existe. Dado que solo interesan los valores de $x \neq 1$, podemos definir $f(1) = \frac{1}{2}$, con lo cual la discontinuidad desaparece. Luego*

$$\lim_{x \to 1} \sqrt{\frac{x - 1}{x^2 - 1}} = \lim_{x \to 1} \sqrt{f(x)} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Nota: El ejemplo anterior demuestra que el teorema 6 se puede generalizar un poco, pidiendo solamente que el límite de f exista en a, y sea igual a b (la demostración es prácticamente la misma, y se deja de ejercico).

Ejemplo 62 *La función* $\varphi(x) = \cos\left(x^2 + 3x - 10\right)$ *es continua, pues es la composición de la función coseno con el polinomio* $p(x) = x^2 + 3x - 10$.

Ejemplo 63 *La función*

$$h(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}\left(x^2-1\right)}{x^2-1} & si\ \ |x| \neq 1, \\ 1 & si\ \ |x| = 1, \end{cases}$$

es continua, pues es la composición de las funciones f *y* g *del ejemplo 60, las cuales son continuas.*

Ejemplo 64 *La función* Ψ *definida por* $\psi(x) = \sqrt{2 + \cos x}$ *es continua, pues es la composición de* $f(x) = 2 + \cos x$, *con la función* $g(x) = \sqrt{x}$. *Es importante aquí que* $f(x) \in \,]0, \infty[$, *y* g *es continua en ese intervalo.*

Ejemplo 65 *La función dada por* $\phi(x) = \sqrt{1 - x^2}$ *es continua en* $]-1, 1[$, *pues es la composición de* $f(x) = 1 - x^2$, *con la función* $g(x) = \sqrt{x}$, *donde* $f(x) \in \,]0, \infty[$, $\forall x \in \,]-1, 1[$.

Ejemplo 66 $\displaystyle\lim_{x \to 0+} \frac{1 - \cos\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \to 0+} \frac{1 - \cos\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}\right)^2} = \frac{1}{2}.$

Ejemplo 67 $\displaystyle\lim_{x \to \infty} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 1$, *pues* $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$, *y entonces*

$$\lim_{x \to \infty} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = \lim_{x \to \infty} g\left(\frac{1}{x}\right) = g(0) = 1,$$

donde g *es la función utilizada en el ejemplo 60. Nótese que aquí tomamos* $a = \infty$ *en el teorema 6. El lector puede convencerse de que el resultado sigue siendo válido en este caso. Lo que hicimos es equivalente a considerar el cambio de variable* $t = \frac{1}{x}$. *Cuando* x *tiende a* ∞ *tenemos que* t *tiende a* 0, *y entonces*

$$\lim_{x \to \infty} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = \lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1.$$

Ejemplo 68 *Para calcular el límite*

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt[3]{x} - 1}$$

hagamos $x = t^6$. *Entonces* t *tiende a 1 cuando* x *tiende a 1. Luego*

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt[3]{x} - 1} = \lim_{t \to 1} \frac{t^3 - 1}{t^2 - 1} = \lim_{t \to 1} \frac{t^2 + t + 1}{t + 1} = \frac{3}{2}.$$

En realidad aquí aplicamos el teorema 6 a las funciones $g(t) = \dfrac{t^3 - 1}{t^2 - 1}$, $f(x) = \sqrt[6]{x}$. *La continuidad de* f *se demuestra en los ejercicios 1.1.3.*

1.5.2 Teorema de los valores intermedios

Para enunciar el segundo teorema de esta sección definamos primero la continuidad de una función en un intervalo cerrado.

Definición 6 *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Decimos que f es continua en $[a, b]$ si es continua en cada $x \in]a, b[$, y si*

$$\lim_{x \to a+} f(x) = f(a), \quad \lim_{x \to b-} f(x) = f(b).$$

Por ejemplo, $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ es continua en el intervalo $[-1, 1]$. Similarmente se puede hablar de continuidad en intervalos de la forma $]-\infty, b]$ y $[a, \infty[$. Por ejemplo, $f(x) = \sqrt{x}$ es continua en $[0, \infty[$. El teorema que sigue es de gran utilidad. Su contenido es geométricamente evidente.

Teorema 7 *Sea f continua en $[a, b]$, con $f(a) \cdot f(b) < 0$. Entonces existe un $c \in]a, b[$ tal que $f(c) = 0$.*

Prueba
Si pérdida de generalidad, asuma que $f(a) < 0 < f(b)$. Considere el conjunto

$$A = \{x \in [a, b] : f(z) < 0, \ \forall z \in [a, x]\}.$$

Entonces $A \neq \emptyset$ pues $a \in A$, y además A es acotado superiormente por b. Sea $c = \sup A$. Note que $c \in [a, b]$. Vamos a demostrar que $f(c) = 0$.
Primero observemos que $c > a$. En efecto, tomando $\varepsilon = -f(a)$ tenemos la existencia de $\delta > 0$ tal que

$$a \leq x < a + \delta \Rightarrow f(x) < f(a) + \varepsilon = 0.$$

En particular $a + \frac{\delta}{2} \in A$.
Ahora note que por definición del supremo, si $a < z < c$ entonces existe $x \in A$ tal que $z < x$, y por lo tanto $f(z) < 0$. Esto demuestra que f es negativa en $[a, c[$. Ahora descartemos las dos posibilidades:

- Si $f(c) < 0$, entonces $c < b$, y como f es continua, tomando $\varepsilon = -f(c) > 0$ tenemos que existe $\delta > 0$ tal que
$$|x - c| < \delta \Rightarrow f(x) < f(c) + \varepsilon = 0.$$
En particular
$$c \leq x \leq c + \frac{\delta}{2} \Rightarrow f(x) < 0.$$
Como ya sabíamos que $f < 0$ en $[a, c[$, concluimos que $f < 0$ en $[a, c + \frac{\delta}{2}]$. Entonces $c + \frac{\delta}{2} \in A$, lo cual es contradictorio.

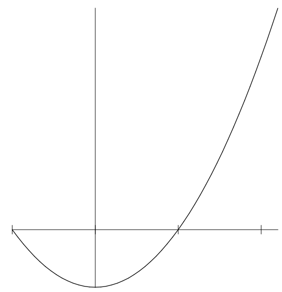
- Si $f(c) > 0$, tomando $\varepsilon = f(c) > 0$ tenemos que existe $\delta > 0$ tal que
$$c - \delta < x \leq c \Rightarrow f(x) > f(c) - \varepsilon = 0,$$
pero esto contradice el hecho ya demostrado que $f < 0$ en $[a, c[$.

Esto demuestra que $f(c) = 0$. $\square$
Como un corolario se obtiene el importante *teorema de los valores intermedios:*

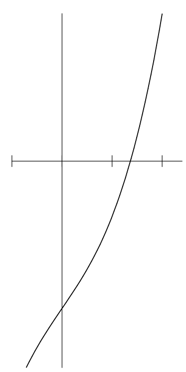
Corolario 1 *Sea f continua en $[a, b]$, con $f(a) < y < f(b)$ (o $f(a) > y > f(b)$). Entonces existe un $c \in]a, b[$ tal que $f(c) = y$.*

Prueba: Aplique el teorema anterior a la función $g(x) = f(x) - y$. $\square$

Ejemplo 69 *Para* $f(x) = x^2 - 1$ *tenemos* $f(0) = -1 < 0$, $f(2) = 3 > 0$. *En este caso es fácil ver que* $c = 1$ *es tal que* $f(c) = 0$.

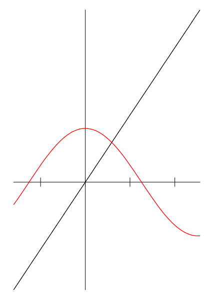


Ejemplo 70 *Para* $f(x) = x^3 + x - 1$ *tenemos* $f(0) = -1 < 0$, $f(1) = 1 > 0$. *El teorema garantiza la existencia de* $c \in]0, 1[$ *tal que* $f(c) = 0$.



En este caso, es fácil demostrar que f *es estrictamente creciente, así que* c *es único. Ahora, dado que* $f(.6) = -.184 < 0$, $f(.7) = .043 > 0$, *el teorema nos garantiza que* $.6 < c < .7$. *De hecho se puede demostrar que* $c = .682327803828\ldots$

Ejemplo 71 *Para* $f(x) = x - \cos x$ *tenemos* $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} - \cos\frac{1}{2} < 0$. *Además* $f(1) = 1 - \cos 1 > 0$. *Luego existe* $c \in]\frac{1}{2}, 1[$ *tal que* $c - \cos c = 0$. *Gráficamente, el punto* (c, c) *es el punto de intersección de* *la recta $y = x$ con la gráfica de la función coseno.*



Se puede demostrar que $c = .73908513321516\ldots$

1.5.3 Extremos de funciones continuas en intervalos cerrados

El siguiente teorema no es menos importante que el anterior, sobre todo en aplicaciones.

Teorema 8 *Sea f continua en $[a, b]$. Entonces*

1. *f es acotada en $[a, b]$. O sea, existe $m > 0$ tal que $|f(x)| \leq m$, $\forall \in [a, b]$.*
2. *Existen $x_0, x_1 \in [a, b]$ tales que $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$, $\forall x \in [a, b]$.*

Es decir f alcanza su máximo y su mínimo en $[a, b]$.
Antes de pasar a la demostración, veamos algunos ejemplos.

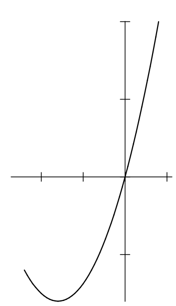
Ejemplo 72 *La función $f(x) = \frac{1}{x}$ es continua en el intervalo $]0, 1]$, pero no es acotada en dicho intervalo. Esto demuestra que es imprescindible que el intervalo sea cerrado.*

Ejemplo 73 *La función $f(x) = x^2 + 4x$ es continua en todo $\mathbb{R}$. De acuerdo con el teorema, esta función es acotada en el intervalo $[-3, 1]$. Esto es algo que puede verificarse directamente, pues*

$$|f(x)| \leq x^2 + 4|x| \leq (-3)^2 + 4|-3| = 21, \ \forall x \in [-3, 1].$$

El teorema garantiza además la existencia de $x_0, x_1 \in [-3, 1]$ tales que $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$, $\forall x \in [-3, 1]$. De hecho, dado que la gráfica de f es una parábola, es fácil ver que

$$-4 = f(-2) \leq f(x) \leq f(1) = 5, \ \forall x \in [-3, 1].$$



Demostración del teorema 8

Paso 1. Demostremos que f está acotada superiormente. Para esto se define el conjunto

$$A = \{x \in [a, b] : f \text{ está acotada superiormente en } [a, x]\}.$$

Entonces $a \in A$, y A está acotado superiormente por b. Sea $\alpha = \sup A$. Suponga que $\alpha < b$. Tomando $\varepsilon = 1$ tenemos que existe $\delta > 0$ tal que

$$\alpha - \delta < x < \alpha + \delta \Rightarrow f(x) < f(\alpha) + 1. \tag{1.3}$$

Ahora sea $x_0 \in A$ tal que $x_0 > \alpha - \delta$. Por definición de A existe m tal que

$$f(x) \leq m, \ \forall x \in [a, x_0],$$

y entonces por 1.3 concluimos que

$$f(x) \leq \max\left(m, f(\alpha) + 1\right), \ \forall x \in \left[a, \alpha + \frac{\delta}{2}\right],$$

en otras palabras $\alpha + \frac{\delta}{2} \in A$. Como esto contradice la definición de α, concluimos que $\alpha = b$. Tomando $\varepsilon = 1$ de nuevo tenemos que existe $\delta > 0$ tal que

$$b - \delta < x \leq b \Rightarrow f(x) < f(b) + 1.$$

Si $x_0 \in A$ es tal que $x_0 > b - \delta$, existe m tal que

$$f(x) \leq m, \ \forall x \in [a, x_0],$$

y luego

$$f(x) \leq \max\left(m, f(b) + 1\right), \ \forall x \in [a, b].$$

Paso 2. Demostremos la existencia de x_1. Como f es acotada superiormente, defina

$$m = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}.$$

Si x_1 no existe, tenemos $f(x) < m$, $\forall x \in [a, b]$. Entonces la función

$$g(x) = \frac{1}{m - f(x)}$$

es continua y positiva en $[a, b]$. Pero dado $N > 0$, existe (por definición de m) un $x \in [a, b]$ tal que $f(x) > m - \frac{1}{N}$, de donde se sigue que

$$g(x) = \frac{1}{m - f(x)} > N.$$

Esto demuestra que g no es acotada superiormente en $[a, b]$, lo cual contradice el paso 1.

Paso 3. Para la acotación inferior y la existencia de x_0, aplique los pasos 1 y 2 a la función $-f$. $\square$

1.5.4 Continuidad uniforme

En las secciones anteriores, hemos hablado de funciones continuas en un conjunto A, como aquellas que son continuas en cada uno de los puntos de A. Ahora para la continuidad en un punto $a \in A$, interesa únicamente el comportamiento de f cerca de a. Es decir el concepto de continuidad es local. Siendo más explícito, la continuidad en el punto a significa la existencia de un $\delta > 0$, dado $\varepsilon > 0$, tal que

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon \tag{1.4}$$

Nótese que δ puede depender del punto a, y por lo tanto podemos escribir $\delta = \delta(\varepsilon, a)$.
En caso que se pueda escoger δ, de manera que (1.4) sea válido para todo $a, x \in A$, diremos que f es uniformemente continua en A A continuación escribimos esto formalmente.

Definición 7 *Sea f definida en un conjunto $A \in \mathbb{R}$. Diremos que f es uniformemente continua en A, si para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que:*

$$\forall a, x \in A, \quad |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Los ejemplos aclaran que este concepto es, en efecto, más fuerte que el de continuidad.

Ejemplo 74 *La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 1$, es uniformemente continua en $\mathbb{R}$. En efecto, note que*

$$|f(x) - f(a)| = 3|x - a| < \varepsilon, \text{ si } \quad |x - a| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Es decir $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$ funciona, independientemente de a.

Ejemplo 75 *La función definida por $f(x) = x^2$, es uniformemente continua en $A = [-3, 5]$, dado que, para $a, x \in A$*

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &= \left|x^2 - a^2\right| \\ &= |x + a|\,|x - a| \\ &\leq (|x| + |a|)\,|x - a| \\ &\leq 10\,|x - a|, \end{aligned}$$

Dado $\varepsilon > 0$, se puede tomar $\delta = \frac{\varepsilon}{10}$.

Ejemplo 76 *La función $f :]0, 1] \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \frac{1}{x}$, es continua en $A =]0, 1]$ pero no es uniformemente continua en dicho conjunto. En efecto, si f fuera uniformemente continua en $]0, 1]$, dado $\varepsilon = 1$ existiría $\delta > 0$ tal que*

$$\forall a, x \in]0, 1], \quad |a - x| < \delta \Rightarrow \left|\tfrac{1}{x} - \tfrac{1}{a}\right| < 1.$$

Pero tomando $a = \frac{1}{n}$, $x = \frac{1}{2n}$, con $n > \frac{1}{2\delta}$ se tiene que $|a - x| = \frac{1}{2n} < \delta$, mientras que $\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| = n \geq 1$. Dado que esto es contradictorio, f no es uniformemente continua en $]0, 1]$. Geométricamente, lo que ocurre en este ejemplo es que, comforme a y x se acercan al origen, sus imagenes se alejan. En este ejemplo, para la continuidad en el punto a la constante δ debe escogerse siempre menor que a, y por tanto es imposible hallar un δ que funcione para todo $a \in]0, 1]$.

Teorema 9 *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$. Entonces f es uniformemente continua en $[a, b]$.*

Demostración
Procederemos por contradicción. Supongamos que f no es uniformemente continua en $[a, b]$. Entonces por definición, existe $\varepsilon > 0$ tal que, para todo $\delta > 0$ existen $x, y \in I$ que satisfacen

$$|x - y| < \delta \text{ y } |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon.$$

En particular. para cada $n \in \mathbb{N}$ existen x_n, $y_n \in [a,b]$ tales que

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \text{ y } |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon.$$

Ahora, como la sucesión (x_n) es acotada, existe una subsucesión (x_{n_k}) que converge. Sea $x = \lim x_{n_k}$. Dado que $|x_{n_k} - y_{n_k}| < \frac{1}{n_k} \to 0$, se sigue que $y_{n_k} \to x$. Pero como $x \in [a,b]$, por la continuidad de f se tiene

$$f(x) = \lim f(x_{n_k}) = \lim f(x_{n_k}),$$

lo cual es contradictorio con el hecho que $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon$.

Ejemplo 77 *Por el teorema anterior, la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$, es uniformemente continua en cada intervalo cerrado y acotado. Sin embargo, no es uniformemente continua en todo $\mathbb{R}$. En efecto, nótese que $\left|\left(n + \frac{1}{n}\right) - n\right| = \frac{1}{n} \to 0$, mientras que*

$$\left|f\left(n + \tfrac{1}{n}\right) - f(n)\right| = 2 + \tfrac{1}{n^2} > 2.$$

Consecuentemente, para $\varepsilon = 2$ (o cualquier $\varepsilon \leq 2$, ε positivo) es imposible hallar $\delta > 0$ que satisfaga (1.4).

1.5.5 Continuidad y funciones invertibles

En esta sección, consideramos funciones definidas en un intervalo I, el cual puede ser de cualquier tipo (abierto, cerrado, acotado, no acotado, semi-cerrado, etc.) excepto si da en forma explícita. Es común establecer los resultados en primer lugar para intervalos cerrados y acotados, es decir para $[a,b]$, y luego extenderlos al caso general. Para ello, es útil el siguiente resutado, cuya demostración se deja como ejercicio.

Lema 3 *Todo intervalo es la unión contable y creciente de intervalos cerrados acotados. Más precisamente, dado un intervalo I existen sucesiones (a_n) y (b_n), la primera decreciente y la segunda creciente, tales que $I = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n]$.*

Por ejemplo, $]a, \infty[= \bigcup_{n\geq 2} \left[a + \frac{1}{n}, a + n\right]$. Los demás casos se tratan de manera similar.

Lema 4 *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua en inyectiva. Entonces f es (estrictamente) monótona.*

Demostración
Si $f(a) < f(b)$, demostramos que f es creciente. En efecto, sean $x_0, x_1 \in [a,b]$ tales que $x_0 < x_1$. Nótese en primer lugar que si $f(x_0) \geq f(b)$, el teorema de valores intermedios implicaría la existencia de $c \in [a, x_0]$ tal que $f(c) = f(b)$, lo que contradice la inyectividad. Esto demuestra que $f(x_0) < f(b)$. De la misma forma, si tuviéramos $f(x_1) \leq f(x_0)$, entonces existiría $d \in [x_1, b]$ tal que $f(d) = f(x_0)$, lo cual es contradictorio. Por lo tanto $f(x_0) < f(x_1)$. Nótese que el argumento es válido incluso en el caso $x_0 = a$ o $x_1 = b$.

Si $f(a) > f(b)$, se tiene que $-f(a) < -f(b)$, y por el argumento anterior se concluye que $-f$ es decreciente, es decir que f es creciente. $\square$

Este resultado es válido en cualquier intervalo I. En efecto,

1.5.6 Ejercicios

1. Si $\lim_{x\to\infty} f(x) = b$, y g es continua en b, entonces $\lim_{x\to\infty} g(f(x)) = g(b)$.

2. Dé un ejemplo en el que f sea continua en a, g esté definida en $b = f(a)$, el límite $\lim_{x\to b} g(x)$ exista, pero $\lim_{x\to a} g \circ f(x)$ no exista.

3. Si f es acotada en un conjunto A y en un conjunto B, demuestre que es acotada en $A \cup B$.

4. ¿En cuáles puntos es continua la función $f(x) = [[x]]$ (parte entera)?. Haga una gráfico de esta función.

5. Diga en cuáles puntos es continua cada una de las funciones, y justifique.
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = \frac{1}{n}, \\ 0 & \text{si no.} \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{I}, \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q}. \end{cases} \qquad h(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{I}, \\ -x & \text{si } x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

6. Calcule los siguientes límites
$$\lim_{x\to a} \frac{x^n - a^n}{x - a}, \qquad \lim_{x\to 64} \frac{\sqrt{x} - 8}{\sqrt[3]{x} - 4}, \qquad \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[4]{x} - 1},$$
$$\lim_{x\to 1} \frac{x^{2/3} - 2x^{1/3} + 1}{(x-1)^2}, \qquad \lim_{x\to a} \frac{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}}{x - a}, \qquad \lim_{x\to 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1},$$
$$\lim_{x\to \frac{\pi}{3}} \frac{1 - 2\cos x}{\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}, \qquad \lim_{x\to 1} (1 - x) \tan \tfrac{\pi x}{2}, \qquad \lim_{x\to a} \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a}{x - a}.$$

7. Calcule el límite
$$\lim_{x\to +\infty} \left(\operatorname{sen}\sqrt{x+1} - \operatorname{sen}\sqrt{x}\right).$$
Sug. Use la identidad $\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta = 2\operatorname{sen}\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$. Luego el coseno es acotado, y el seno tiende a cero.

8. Calcule los siguientes límites:
$$\lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x}\right), \qquad \lim_{x\to \infty} \left(x + \sqrt[3]{1 - x^3}\right), \qquad \lim_{x\to -\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - x\right),$$
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 3}}{\sqrt[3]{8x^3 + 1}}, \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1}, \qquad \lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1},$$
$$\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2 + 1}}{x + 1}, \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}, \qquad \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{a + h} - \sqrt[3]{a}}{h}.$$

9. Calcule el límite $\lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x - 1} - \sqrt{x^2 - x + 1}\right)$.

10. Demuestre la existencia de raíces usando el teorema de los valores intermedios. Más precisamente, dado $y > 0$, demuestre que existe $x > 0$ tal que $x^n = y$. Sug. Tome $f(x) = x^n$ y note que $f(0) < y < f(y + 1)$.

11. Demuestre que existe $x \in]0, \pi[$ tal que $\frac{\operatorname{sen} x}{x} = \frac{1}{2}$.
12. Demuestre que el gráfico de $y = x$ corta al de $y = \operatorname{sen} 2x$ en el intervalo $\left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right[$.
13. Demuestre que la ecuación $\tan x = x$ tiene un número infinito de soluciones.
14. Muestre que la ecuación $x^3 - 3x + 1 = 0$ tiene tres raíces, una en el intervalo $]1, 2[$, otra en $]-2, -1[$ y otra en $]0, 1[$. Aproxime una de estas raíces con dos dígitos de exactitud.
15. Sea $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, donde n es impar y a_n es positivo.
    (a) Demuestre que $\lim_{x \to +\infty} p(x) = +\infty$, $\lim_{x \to -\infty} p(x) = -\infty$.
    (b) Demuestre que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $p(c) = 0$.
16. Estudie la continuidad de la función
$$f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } -1 \leq x < 1, \\ x - 2 & \text{si } 1 \leq x \leq 3, \end{cases}$$
    en el intervalo $[-1, 1]$. ¿Alcanza f un máximo o un mínimo en dicho intervalo?
17. Demostrar que si f es continua en $[a, b]$, entonces $f([a, b]) = [f(x_1), f(x_0)]$, para algún x_0 y algún x_1 en $[a, b]$.
18. Demostrar que la función coseno es continua en todo $\mathbb{R}$
19. Halle el máximo y el mínimo de la función $f(x) = x^2 - 4x + 2$ en el intervalo $[0, 3]$. Halle además los puntos en los cuales se alcanzan dichos extremos.
20. Repita el ejercicio anterior con cada una de las funciones siguientes, en el intervalo indicado:
    (a) $f(x) = \cos x$, en $[-\frac{\pi}{3}, \pi]$.
    (b) $f(x) = 1 - x^3$ en $[-2, 0]$.
    (c) $f(x) = \cos x + \operatorname{sen} x$ en $[0, \frac{\pi}{2}]$.
21. Demuestre que la función $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$ es acotada en todo $\mathbb{R}$. Además, f alcanza su máximo y su mínimo. Sug. Como $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$, puede elegirse $N > 0$ tal que
$$|x| > N \Rightarrow |f(x)| < \frac{1}{2}.$$
    Luego aplique el teorema 8 en el intervalo $[-N, N]$.
22. Sea $p(x) = ax^5 + b \cos x + \frac{x}{x^2+1}$, donde $a > 0$.
    (a) Demuestre que $\lim_{x \to \infty} p(x) = \infty$, $\lim_{x \to -\infty} p(x) = -\infty$.
    (b) Concluya que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $p(c) = 0$.
23. Demuestre que la función definida por $f(x) = x^2$, no es uniformemente continua en $[c, +\infty[$, para cualquier $c \in \mathbb{R}$.
24. Demuestre que la función $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ es uniformemente continua en todo $\mathbb{R}$.

25. Demuestre que la composición de funciones uniformemente continuas es uniformemente continua.

26. Sea $f : I \to \mathbb{R}$. Probar que si f es monótona, acotada y continua en el intervalo I, entonces es uniformemente continua.

27. Demostrar que la suma de funciones uniformemente continuas en un intervalo I es uniformementte continua en I. Demostrar que el producto lo es si las funciones son acotadas.

28. Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es periódica si y solo si existe $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$ tal que $f(x+t) = f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Demostrar que si f es periódica y continua en $\mathbb{R}$ en tonces f es uniformemente continua en $\mathbb{R}$.

29. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uniformemente continua en $\mathbb{R}$. Demuestre que existen $a, b \in \mathbb{R}^+$ tal que $|f(x)| \leq a|x| + b$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

30. Aplicando segmentos encajados probar que toda función continua en un intervalo cerrado de $\mathbb{R}$ y acotada es uniformemente continua.

31. Suponga que f es uniformemente continua en un subconjunto acotado S de $\mathbb{R}$. Demuestre que f es acotada en S.

32. Si f es uniformemente continua en A, y existe $c > 0$ tal que $f(x) \geq c, \forall x \in A$, demuestre que $g = \frac{1}{f}$ es uniformemente continua en A.

33. Demuestre que f es continua en A si y solo si satisface la siguiente propiedad: Para cada par de sucesiones (x_n) y (y_n) en A, tales que $x_n - y_n \to 0$, se tiene $f(x_n) - f(y_n) \to 0$.

34. Considere $f :]0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{x}$. Demuestre que f no es uniformemente continua

35. Si f es uniformemente continua en A, y si $B \subseteq A$, demuestre que f es uniformemente continua en B.

36. Se dice que una función $f : A \to \mathbb{R}$ es Lipschitz continua (o que satisface una condición de Lipschitz) si existe $\lambda > 0$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq \lambda |x - y|, \ \forall x, y \in A.$$

    Demuestre que toda función Lipschitz continua es uniformemente continua.

37. En la definición de Lipschitz continua, si $0 \leq \lambda < 1$, se dice que f es contractiva. Considere $f : [a, b] \to [a, b]$ contractiva. Se define $x_0 = a$, $x_{n+1} = f(x_n)$. Demuestre que:

    (a) i. para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene $|x_{n+1} - x_n| \leq \lambda^n |x_1 - x_0|$

        ii. la serie
        $$\sum_{n=0}^{\infty} (x_{n+1} - x_n) \quad \text{converge absolutamente.}$$

        iii. la sucesión $x_n = x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k)$ converge, y su límite x satisface $f(x) = x$. A tal x se le llama punto fijo de f

38. La función exponencial $f(x) = e^x$ es uniformemente continua en $]-\infty, b]$, para todo $b \in \mathbb{R}$.

1.6 Ejercicios de todo

1. De la tarea 2. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$, se puede definir (o redefinir) $f(a) = l$, de manera que f sea continua en a. Use esto para demostrar que, si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l_1$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l_2$ entonces

   (a) $\lim\limits_{x\to a} (f(x) + g(x)) = l_1 + l_2$

   (b) $\lim\limits_{x\to a} f(x) g(x) = l_1 l_2$

   (c) si además $l_2 \neq 0$ entonces $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1}{l_2}$.

2. De la tarea 3

   (a) Demuestre que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} -f(x) = -\infty$

   (b) Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ y g es acotada inferiormente en $I - \{a\}$, demuestre que $\lim\limits_{x\to a} (f(x) + g(x)) = \infty$

   (c) Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l$, entonces

      i. $\lim\limits_{x\to a} f(x) g(x) = \infty$ si $l > 0$

      ii. $\lim\limits_{x\to a} f(x) g(x) = -\infty$ si $l < 0$

      Dé ejemplo en que $l = 0$ y el límite $\lim\limits_{x\to a} f(x) g(x)$ dé ∞, $-\infty$, 0, 17, respectivamente.

   (d) Demuestre que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = l$ si y solo si, para toda sucesión (x_n) que diverge a ∞, se tiene $f(x_n) \to l$

   (e) Si $f(x) \geq g(x)$, $\forall x \geq c$, y si $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$, demuestre que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

   (f) Si $f(x) \geq g(x) \geq h(x)$, $\forall x \geq c$, y si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} h(x) = l$, demuestre que $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = l$.

   (g) Escriba las definiciones de $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = l$, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$.

3. Si α representa uno de los símbolos a^+, a^-, ∞ ó $-\infty$, si $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = l \in \mathbb{R}$, y si g es continua en l, demuestre que $\lim\limits_{x\to -\infty} g(f(x)) = g(l)$.

4. De la tare 5

   (a) Demuestre geométricamente las fórmulas de suma de ángulos para seno y coseno.

   (b) Deduzca las fórmulas de ángulo doble

   (c) Demuestre que

   $$\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta = 2\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \quad \cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

   (d) Resuelva las ecuaciones

   $$2\operatorname{sen}^2 x + 3\cos x = 0, \quad \operatorname{sen} x + \cos x = 1, \quad \operatorname{sen} x + \sqrt{3}\cos x = 1.$$

5. De la tarea 6

(a) Graficar con el uso de *Mathematica* las siguientes funciones

$$f(x) = \operatorname{sen} x, \quad g(x) = \cos x, \quad h(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}, \quad j(x) = \frac{1 - \cos x}{x}.$$

(b) Grafique también las funciones

$$f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}, \quad g(x) = \operatorname{sen} \frac{1}{x}, \quad h(x) = x \operatorname{sen} \frac{1}{x}, \quad j(x) = x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}.$$

(c) Se define $\cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$. Determine el dominio y el período. Trace la gráfica primero apie, y luego con *Mathematica.* Calcule

$$\lim_{x \to 0+} \cot x, \quad \lim_{x \to \pi-} \cot x$$

(d) Considere $g(x) = x^2 + \sqrt{x(1-x)}$. Grafique usando *Mathematica,* y halle $\alpha \in]0,1[$ tal que $g(\alpha) = \frac{1}{2}$.

6. De la tarea 8

(a) Verifique que $f(x) = x^r$, con $r \in \mathbb{Q}$, es derivable en $x > 0$, y se tiene

$$f'(x) = \frac{d}{dx} x^r = r x^{r-1}.$$

(b) Demuestre que $g(x) = \cos x$ es derivable en cada $x \in \mathbb{R}$, y se tiene

$$g'(x) = \frac{d}{dx} \cos x = -\operatorname{sen} x.$$

(c) Demuestre que *cotangente* y *cosecante* son derivables en sus dominios, y que

$$\frac{d}{dx} \cot x = -\csc^2 x, \quad \frac{d}{dx} \csc x = -\csc x \cot x$$

1.7 Ejercicios adicionales

1. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones en los puntos indicados:

(a) $f(x) = |x|$ en $x = 0$

(b) $f(x) = sen\left(\frac{x}{\pi}\right)$ en $x = 0$

(c) $f(x) = [[x]]$ en $x = 3$

(d) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x+3} & \text{si } x \neq -3 \\ 5 & \text{si } x = -3 \end{cases}$

(e) $f(x) = \frac{x^2-100}{x-10}$ en $x = 10$

2. Analice la continuidad de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{I} \\ 1-x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$

(b) $g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ -x^2 & \text{si } x \in \mathbb{I} \end{cases}$

(c) $h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = o \\ x sen \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$

Use la desigualdad $|\sin x| < |x|$ para probar que es continua en 0 y la identidad

$$\sin x - \sin y = 2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

para probar que es continua en todo $\mathbb{R}$.

3. Sea $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \in [0,1] \\ \frac{\sin\left(\frac{x-1}{a}\right)}{x^2-1} & \text{si } x \in \left]1,\pi\right] \end{cases}$

   ¿Cual debe ser el valor de a para que f sea continua en $[0,\pi]$

4. Sea $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{I} \\ & \text{si } x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, \frac{p}{q} \text{ irreductible.} \end{cases}$

   Muestre que f es continua en $\mathbb{I}$ y discontinua en $\mathbb{Q}$.

5. si f y g son continuas. Muestre que también son continuas:

$$\begin{aligned} \max(f,g)(x) &= \max\{f(x), g(x)\} \\ \max(f,g)(x) &= \min\{f(x), g(x)\} \end{aligned}$$

6. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Pruebe que son equivalentes

   $I)$ f es continua en todo $\mathbb{R}$

   $II)$ $f^{-1}(B)$ es cerrado $\quad \forall B$ cerrado.

   $III)$ $f^{-1}(\bar{A}) \leq \left(f^{-1}(A)\right)^o \quad \forall A \in \mathbb{R}$.

7. Pruebe que la ecuación $\sqrt[3]{x+1} = 2 - x^2$ tiene al menos una solución en el intervalo $[0,7]$.

8. Se dice que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ satisface la propiedad de Darboux en $[a,b]$, sii para culesquiera dos puntos $x_1 < x_2$; $x_1, x_2 \in [a,b]$, y $\quad \forall c$ entre $f(x_1)$ y $f(x_2) \quad \exists s : x_1 < s < x_2$ tal que $f(s) = c$

   ¿Es suficiente la condición de Darboux para decir que una función es continua?

9. Sea E un conjunto numerable de $[a,b]$. Construya una función discontinua en todos los puntos de E y continua en todos los demás puntos de $[a,b]$

10. Sea f continua en $[a,b]$ tal que $f(x) \neq 0 \quad \forall x \in [a,b]$. Pruebe que $f(x) \cdot f(y) > 0 \quad \forall x, y \in [a,b]$.

    (a) Sea $f : \left]a,b\right[\to \mathbb{R}$ uniformemente continua. Pruebe que $f(\left]a,b\right[)$ es acotado.

    (b) Si f es uniformemente continua en todo $\mathbb{R}$. Muestre que existen dos números positivos A y B tales que $|f(x)| = A|x| + B \quad \forall x \in \mathbb{R}$

11. Muestre que si f es una función uniformemente continua en E, E es un conjunto acotado, entonces f es acotada.

12. Se dice que f es continua a trozos en I, si es continua excepto en una cantidad finita de puntos, en cada uno de los cuales existen los límites laterales. Demuestre que las siguientes son continuas a trozos.

(a) $f(x) = \frac{x}{|x|}$, en I $= [-a, a]$, $a > 0$.

(b) $g(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ x^2 & \text{si } 1 \leq x < 3 \\ 5 & \text{si } x = 3 \\ x & \text{si } x > 3 \end{cases}$ I=$[0, 5[$

(c) $h(x) = [[x]]$, $x \in J = [-4, 7[$.

(d) $j(x) = (x - [[x]])^2$, $x \in [0, 4[$.

13. (Teorema de Rolle, generalizado). Sea f continua en $[a, b]$, tal que en cada $x \in]a, b[$ existen:

$$\begin{aligned} f'\left(x^+\right) &= \lim_{h \to o^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \\ f'\left(x^-\right) &= \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \end{aligned}$$

Si $f(a) = f(b) = 0$, demuestre que existe $c \in]a, b[$, tal que $f'(c^-)f'(c^+) < 0$.