REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES

El estudio de la derivada de una función, junto con otras consideraciones sobre las funciones tales como el estudio de su campo de existencia (dominio), de sus puntos de corte con los ejes, de sus simetrías y de sus límites, nos permiten representar gráficamente las funciones con relativa facilidad.

La representación gráfica la obtendremos siguiendo las etapas:

a. Estudio del campo de existencia de la función (dominio).
b. Cortes de la gráfica de la función con los ejes de coordenadas.
c. Simetrías de la función.
d. Límites de la función en los puntos frontera de su campo de existencia.
e. Rectas asíntotas.
f. Máximos, mínimos y puntos de inflexión.
g. Intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.
h. Curvatura de la función. Intervalos de concavidad y convexidad.

Estas etapas, en general, nos ayudan a construir la gráfica de las funciones, pero en alguno de los casos no es necesario acudir a todas ellas para representar la función, que es, en definitiva, lo que nos interesa. También es importante recordar que, a veces, tomando valores, con unos pocos puntos, se avanza muy rápidamente en la representación gráfica de la función.

a. Dominio

En este apartado debemos buscar los puntos x tales que $f(x)$ sea real; luego debemos excluir los puntos, si los hay, que anulen los denominadores, los valores que hagan negativo el radicando para las raíces de orden par, los valores que hagan nulos o negativos expresiones en las que tengamos que obtener sus logaritmos, etc.

Ejemplos:

– En la función $f(x)=\dfrac{3x+1}{x^2-4x+3}$, el denominador se anula para los valores $x=1,\ x=3$, luego el campo de existencia consistirá en todos los números reales excepto el 1 y el 3: $Domf=\mathbb{R}-\{1\ ,\ 3\}$ o también $Domf=(-\infty,1)\cup(1,3)\cup(3,\infty)$.

– Si consideramos la función $f(x)=\sqrt{4-2x^2}$, debemos excluir los valores que verifiquen $4-2x^2<0$, es decir, serán válidos los puntos x que cumplan $4-2x^2\geq 0$. Así el campo de existencia estará formado por todos los números reales comprendidos entre $-\sqrt{2}$ y $\sqrt{2}$: $Domf=\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$.

– Para la función $f(x)=\ln(2x-1)$, excluimos los valores que verifiquen $2x-1\leq 0$, es decir, los puntos tales que $x\leq\dfrac{1}{2}$; luego el campo de existencia estará formado por todos los números reales mayores que $\dfrac{1}{2}$: $Domf=\left(\dfrac{1}{2}\ ,\ \infty\right)$.

b. Corte con los ejes

Si queremos encontrar los puntos de corte con el eje de ordenadas, basta con hacer x=0. Si queremos encontrar los puntos de corte con el eje de abscisas, resolveremos la ecuación y=0.

Ejemplos:

- Consideremos la función $f(x)=x^2-x-2$; su corte con el eje de ordenadas se obtiene haciendo $x=0$, luego $y=f(0)=-2$ y el punto de corte es el $(0,-2)$. Los puntos de corte con el eje de abscisas se obtienen resolviendo $y=0$, es decir, $x^2-x-2=0$ y los puntos de corte son el $(-1,0)$ y el $(2,0)$.
- En la función $f(x)=\ln(2x+3)$; su corte con el eje de ordenadas será el punto $(0,\ln 3)$. Con el eje de abscisas se obtienen resolviendo $y=0$, es decir, $2x+3=1$ y el punto de corte será $(-1,0)$.

c. Simetrías

Nos preguntamos en este punto si la función es par, impar o ninguna de las dos cosas. Si la función es par, es decir, $f(x)=f(-x)$ para todo valor de x, la curva será simétrica respecto del eje OY; si la función es impar, es decir, $f(-x)=-f(x)$ para todo valor de x, la curva será simétrica respecto al origen de coordenadas. En otro caso la función no presenta simetrías de este tipo.

Ejemplos:

- Son funciones pares y por tanto simétricas respecto del eje OY:
  $y=x^2$, $y=cos\,x$, $y=x^4-2x^2$, $y=e^{x^2}$, $y=|x|$, $y=\sqrt{x^2-4}$, ...
- Son funciones impares y por tanto simétricas respecto al origen de coordenadas:
  $y=x$, $y=sen\,x$, $y=x^3-x$, $y=\dfrac{1}{x}$, $y=\dfrac{x}{1+x^2}$, $y=\sqrt[3]{x}$, ...

d. Límites

Particularmente importantes, en este punto, son los límites cuando x tiende a $\pm\infty$ o cuando y tiende a $\pm\infty$. En algunos casos estos límites nos darán a conocer ecuaciones de asíntotas como veremos en el apartado siguiente.

e. Asíntotas

Un punto sobre una curva $y=f(x)$ se aleja infinitamente cuando su abscisa, su ordenada o ambas coordenadas crecen infinitamente. Llamaremos *recta asíntota* a toda recta tal que la distancia desde un punto P de la curva, que se aleje infinitamente, a la recta tienda a cero. Hay varias posibilidades para ellas.

- Si $\lim_{x\to\infty} f(x) = b$ (número real), la recta $y = b$ es una **asíntota horizontal**.
- Si $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ (con *a* número real), la recta $x = a$ es una **asíntota vertical**.
- Si al alejarse infinitamente un punto de la curva, x e y crecen infinitamente, para que la recta $y = mx + n$ sea una **asíntota oblicua** debe tender a cero la diferencia entre las ordenadas de la recta y la curva para la misma abscisa. Esta definición lleva en sí un método de cálculo para los coeficientes m y n. $m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ (número real distinto de cero); y si existe, $n = \lim_{x\to\infty}\left[f(x) - mx \right]$.

Ejemplo:

Consideremos la función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x}$

- $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-1}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(x - \frac{1}{x} \right) = \infty$, luego no hay asíntotas horizontales.
- $\lim_{x\to 0} \frac{x^2-1}{x} = \infty$, luego la recta $x = 0$ es una asíntota vertical. Deberíamos entonces analizar los límites laterales en $x = 0$ para determinar la posición de la gráfica de $f(x)$ con respecto a la asíntota.
- $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-1}{x^2} = \lim_{x\to\infty}\left(1 - \frac{1}{x^2} \right) = 1 \Rightarrow m = 1$, entonces obtenemos n de la expresión $\lim_{x\to\infty}\left[f(x) - mx \right] = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x} - x \right) = \lim_{x\to\infty} \frac{-1}{x} = 0$, luego la recta $y = x$ es una asíntota oblicua.

f. Máximos, mínimos y puntos de inflexión

Los máximos y mínimos que estén situados sobre puntos en que la curva sea derivable se obtendrán fácilmente a partir de los teoremas dados sobre las derivadas de orden n, a saber:

"Sea $f(x)$ una función tal que $f'(x_0) = 0$. Si $f''(x_0) < 0$, $f(x)$ tiene en x_0 un máximo y si $f''(x_0) > 0$, la función presenta en x_0 un mínimo."

"Sea $f(x)$ una función derivable n veces en un punto x_0 y tal que $f'(x_o) = f''(x_0) = ... = f^{(n-1)}(x_o) = 0$ y $f^{(n)}(x_o) \neq 0$.

- *Si n es par y $f^{(n)}(x_o) < 0$, $f(x)$ tiene en x_0 un máximo.*
- *Si n es par y $f^{(n)}(x_o) > 0$, $f(x)$ tiene en x_0 un mínimo.*
- *Si n es impar, $f(x)$ tiene en x_0 un punto de inflexión (punto de silla)."*

Los puntos de inflexión estarán entre los que resulten de resolver la ecuación $f''(x)=0$.

Debemos tener cuidado en esta etapa ya que no en todos los puntos donde existen máximos o mínimos la función es derivable, como ocurre en la función $f(x)=x+x^{2/3}$ que representaremos más adelante.

g. Crecimiento y decrecimiento

El corolario del teorema del valor medio (de Lagrange) que nos dice: *"Si $f'(x)>0$ para todos los puntos x de un intervalo, $f(x)$ es creciente en ese intervalo. Si $f'(x)<0$ para todos los puntos x de un intervalo, $f(x)$ es decreciente en ese intervalo"* nos da resuelto prácticamente, salvo algunos problemas de cálculo, este apartado. Debemos tener cuidado, como en el apartado anterior, con los puntos en los que la función no sea derivable.

h. Curvatura

Para analizar la curvatura de una función debemos seguir alguno de los siguientes criterios:

- ✓ *Sea $f(x)$ una función que tiene segunda derivada continua en un entorno del punto x_0*
  - *Si $f''(x_0)<0$, $f(x)$ presenta en x_0 una curvatura de la forma* 
  - *Si $f''(x_0)>0$, $f(x)$ presenta en x_0 una curvatura de la forma* 

- ✓ *Sea $f(x)$ una función que tiene derivadas hasta el orden n en un entorno del punto x_0, donde además $f^{(n)}(x)$ es continua. Si* $f''(x_o)=f'''(x_0)=......=f^{(n-1)}(x_o)=0$ y $f^{(n)}(x_o)\neq 0$, entonces:
  - *Si n es par y $f^{(n)}(x_o)<0$, $f(x)$ tiene en x_0 una curvatura de la forma* 
  - *Si n es par y $f^{(n)}(x_o)>0$, $f(x)$ tiene en x_0 una curvatura de la forma* 
  - *Si n es impar, $f(x)$ tiene en x_0 un punto de inflexión.*

No obstante, dada la complejidad de los cálculos que pueden presentarse, la curvatura de una función no suele analizarse (salvo petición expresa) puesto que con los apartados anteriores, normalmente, tendremos información suficiente para dibujar la gráfica.

EJEMPLOS

- $f(x) = x^4 - 2x^2$

Dominio: $Dom\ f = \mathbb{R}$; ya que un polinomio está definido siempre

Cortes con los ejes:

$$\begin{cases} eje\ OY: x = 0 \Rightarrow f(0) = 0;\ corte\ en\ (0,0) \\ eje\ OX: y = 0 \Rightarrow x^4 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = \sqrt{2}\ ,\ x = -\sqrt{2};\ cortes\ en\ (0,0),\ \left(\sqrt{2},0\right)\ y\ \left(-\sqrt{2},0\right) \end{cases}$$

Simetrías: $f(-x) = (-x)^4 - 2(-x)^2 = x^4 - 2x^2 = f(x)$, luego la función es par y presenta una simetría respecto del eje OY.

Límites: $\lim_{x\to\infty}\left(x^4 - 2x^2\right) = \lim_{x\to\infty} x^2\left(x^2 - 2\right) = \lim_{x\to\infty} x^2 \cdot \lim_{x\to\infty}\left(x^2 - 2\right) = \infty$, por simetría $\lim_{x\to-\infty}\left(x^4 - 2x^2\right) = \infty$.

- No tiene asíntotas horizontales.
- No tiene asíntotas verticales porque $\lim_{x\to a}\left(x^4 - 2x^2\right) \neq \infty\ ,\ \forall a \in \mathbb{R}$.
- Tampoco tiene oblicuas ya que $m = \lim_{x\to\infty}\frac{x^4 - 2x^2}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(x^3 - 2x\right) = \lim_{x\to\infty} x\left(x^2 - 2\right) = \infty$

Máximos, mínimos y puntos de inflexión:
Por tratarse de un polinomio la función es derivable en todo su campo de existencia, luego todos sus máximos y mínimos se obtendrán a partir del estudio de sus derivadas.

$$f'(x) = 4x^3 - 4x$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 4x^3 - 4x = 0 \Rightarrow 4x\left(x^2 - 1\right) = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = -1,\ x = 1$$

$$f''(x) = 12x^2 - 4$$

$$f''(0) = -4 < 0 \Rightarrow en\ x = 0\ la\ función\ tiene\ un\ máximo.\ Punto\ (0,0)$$

$$f''(-1) = 8 > 0 \Rightarrow en\ x = -1\ la\ función\ tiene\ un\ mínimo.\ Punto\ (-1,-1)$$

$$f''(1) = 8 > 0 \Rightarrow en\ x = 1\ la\ función\ tiene\ un\ mínimo.\ Punto\ (1,-1)$$

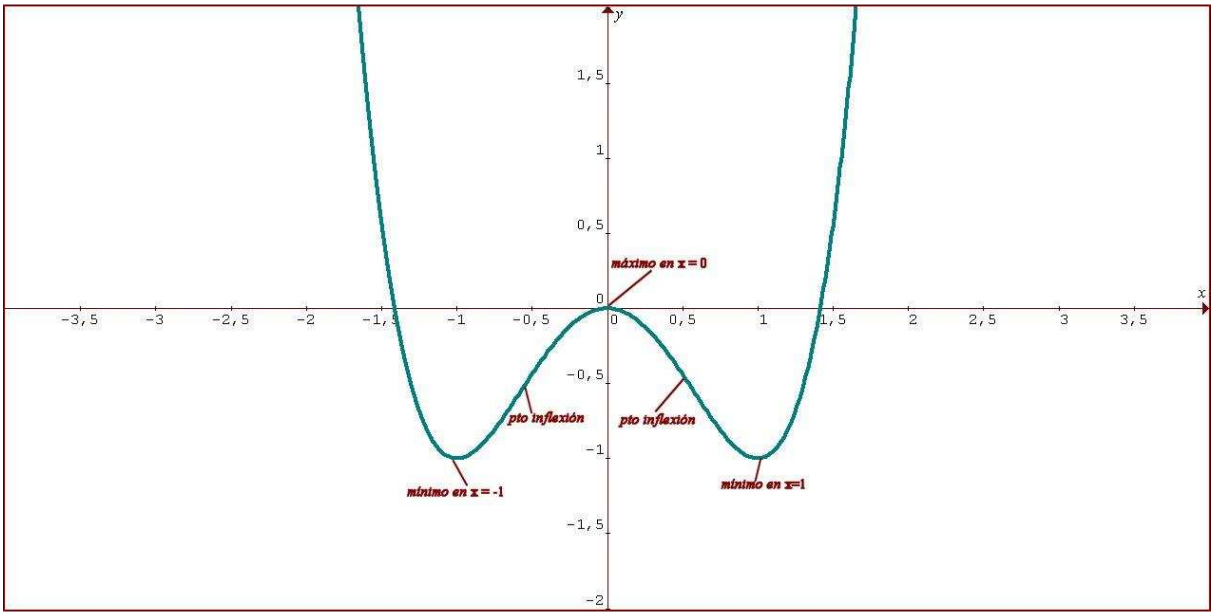
$$f''(x) = 0 \Rightarrow 12x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\ ;\ como\ en\ esos\ puntos\ f'''(x) \neq 0,\ hay\ puntos\ de\ inflexión.$$

Crecimiento y decrecimiento:
Dividimos el campo de existencia en los siguientes intervalos $(-\infty,-1);\ (-1,0);\ (0,1);\ (1,\infty)$. Tenemos que estudiar el signo de $f'(x) = 4x\left(x^2 - 1\right)$ en cada intervalo para determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento. Esto equivale a resolver una de estas inecuaciones: $4x(x-1)(x+1) < 0$ o $4x(x-1)(x+1) > 0$. Para ello utilizaremos la siguiente tabla:

	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,\infty)$
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$(x-1)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x+1)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$4x(x-1)(x+1)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

De aquí se deduce que la función es creciente en los intervalos $(-1,0)\cup(1,\infty)$ y es decreciente en los intervalos $(-\infty,-1)\cup(0,1)$.

Con todos los datos obtenidos podemos representar la función:



❖ $f(x)=x+x^{2/3}$

<u>Dominio:</u> $Dom\ f=\mathbb{R}$; ya que es suma de un polinomio que está definido siempre y de una raíz cúbica que igualmente está definida para todos los números reales.

<u>Cortes con los ejes:</u>

$$\begin{cases} eje\ OY: x=0 \Rightarrow f(0)=0;\ corte\ en\ (0,0) \\ eje\ OX: y=0 \Rightarrow x+\sqrt[3]{x^2}=0 \Rightarrow \sqrt[3]{x^2}\left(\sqrt[3]{x}+1\right)=0 \Rightarrow x=0,\ x=-1;\ cortes\ en\ (0,0)\ y\ (-1,0) \end{cases}$$

<u>Simetrías:</u> $f(-x)=(-x)+\sqrt[3]{(-x)^2}=-x+\sqrt[3]{x^2}\neq\pm f(x)$, la función no es par y tampoco impar luego no presenta simetrías de las consideradas.

Límites: $\lim_{x\to\infty}\left(x+x^{2/3}\right)=\infty$, $\lim_{x\to-\infty}\left(x+x^{2/3}\right)=\lim_{x\to-\infty}x\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)=-\infty\cdot 1=-\infty$.

- No tiene asíntotas horizontales.
- No tiene asíntotas verticales porque $\lim_{x\to a}\left(x+\sqrt[3]{x^2}\right)\neq\infty$, $\forall a\in\mathbb{R}$.
- Buscamos una asíntota oblicua: $m=\lim_{x\to\infty}\frac{x+x^{2/3}}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^{1/3}}\right)=1+0=1$, calculamos entonces el valor de $n=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim_{x\to\infty}\left(x+x^{2/3}-x\right)=\lim_{x\to\infty}x^{2/3}=\infty$, n no existe, con lo que parece que no hay asíntota oblicua, aunque la recta $y=x$ y la curva se aproximan tanto como queramos para valores de $x\to\pm\infty$ (comprobarlo en el programa *Graphmatica* alejando suficientemente el zoom). Esta asíntota no nos resulta de utilidad para la representación puesto que en el trozo que dibujamos está alejada de la curva.

Máximos, mínimos y puntos de inflexión:

$f'(x)=1+\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$, entonces $f'(x)$ no está definida para $x=0$, luego el estudio que hacemos para determinar máximos y mínimos excluye ese punto del que por ahora no podemos decir nada.

$$f'(x)=0\Rightarrow 1+\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}=0\Rightarrow 3\sqrt[3]{x}+2=0\Rightarrow\sqrt[3]{x}=-\frac{2}{3}\Rightarrow x=-\frac{8}{27}$$

$$f''(x)=-\frac{2}{9\sqrt[3]{x^4}}$$

$$f''\left(-\frac{8}{27}\right)=-\frac{2}{+}<0\Rightarrow \textit{en } x=-\frac{8}{27} \textit{ la función tiene un máximo. Punto } \left(-\frac{8}{27},\frac{4}{27}\right)$$

$$f''(x)=0\Rightarrow-\frac{2}{9\sqrt[3]{x^4}}=0\text{, } \textit{que no tiene solución, luego no hay puntos de inflexión.}$$

Crecimiento y decrecimiento:

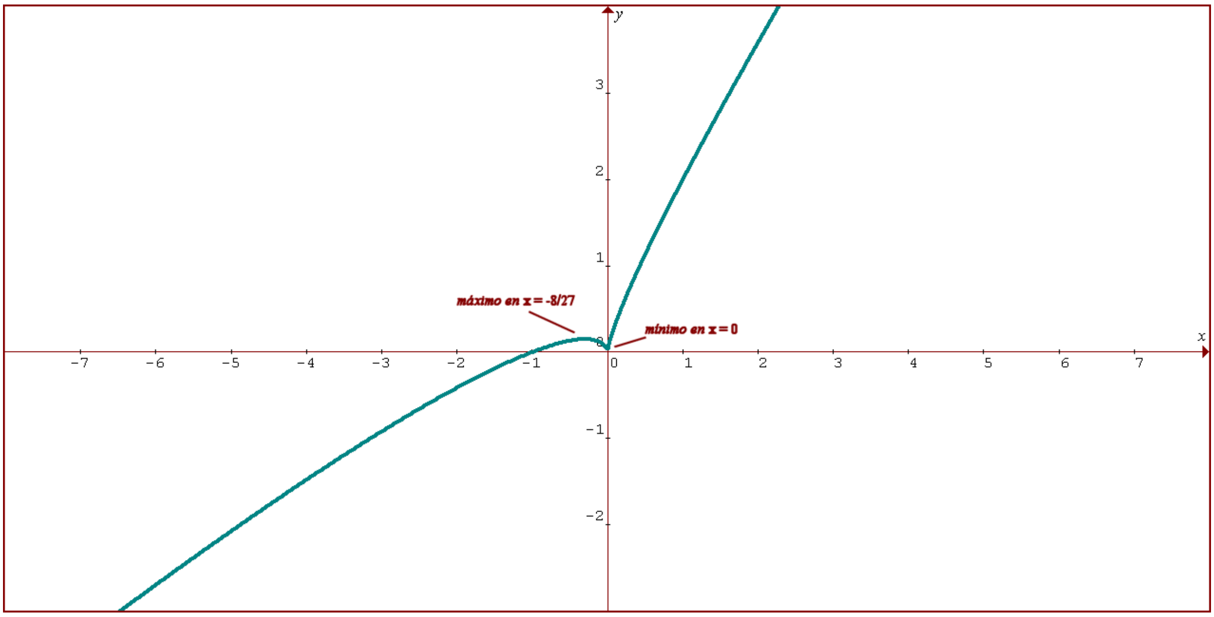
Dividimos el campo de existencia en los siguientes intervalos $\left(-\infty,-\frac{8}{27}\right)$; $\left(-\frac{8}{27},0\right)$; $(0,\infty)$.

Tenemos que estudiar el signo de $f'(x)=1+\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ en cada intervalo para determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento. Esto equivale a resolver la inecuación: $1+\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}>0$ o $\frac{3\sqrt[3]{x}+2}{3\sqrt[3]{x}}>0$. Para ello utilizaremos la siguiente tabla:

	$\left(-\infty,-\frac{8}{27}\right)$	$-\frac{8}{27}$	$\left(-\frac{8}{27},0\right)$	0	$(0,\infty)$
$3\sqrt[3]{x}+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$3\sqrt[3]{x}$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\frac{3\sqrt[3]{x}+2}{3\sqrt[3]{x}}$	$+$	0	$-$	$\nexists$	$+$

De aquí se deduce que la función es creciente en los intervalos $\left(-\infty,-\frac{8}{27}\right)\cup(0,\infty)$ y es decreciente en el intervalo $\left(-\frac{8}{27},0\right)$. A la vista de estos resultados podemos deducir que la función presenta un mínimo en el punto $x=0$, conclusión a la que no habíamos podido llegar mediante el estudio de la derivada.

Con todos los datos obtenidos podemos representar la función:



❖ $f(x)=x-sen\,x$

<u>Dominio:</u> $Dom\,f=\mathbb{R}$; ya que es suma de un polinomio que está definido siempre y de la función seno que igualmente está definida para todos los números reales.

<u>Cortes con los ejes:</u>

$$\begin{cases} eje\ OY: x=0 \Rightarrow f(0)=0;\ corte\ en\ (0,0) \\ eje\ OX: y=0 \Rightarrow x-sen\,x=0 \Rightarrow x=0\ (el\ crecimiento\ nos\ confirma\ que\ no\ hay\ más);\ corte\ en\ (0,0) \end{cases}$$

<u>Simetrías:</u> $f(-x)=(-x)-sen(-x)=-x+sen\,x=-f(x)$, luego la función es impar y presenta una simetría respecto del origen de coordenadas.

<u>Límites:</u>

$\lim\limits_{x\to\infty}(x-sen\,x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-sen\,x)=-\infty$, puesto que la función seno está limitada entre -1 y 1.

- No tiene asíntotas horizontales.
- No tiene asíntotas verticales porque $\lim\limits_{x\to a}\left(x-sen\,x\right)\neq\infty$, $\forall a\in\mathbb{R}$.
- Buscamos una asíntota oblicua: $m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-sen\,x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{sen\,x}{x}\right)=1-0=1$, calculamos el valor de $n=\lim\limits_{x\to\infty}\left[f\left(x\right)-x\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-sen\,x-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}sen\,x=valor\ no\ determinado$, con lo que no existe asíntota oblicua, aunque la recta $y=x$ estará muy relacionada con la curva.

<u>Máximos, mínimos y puntos de inflexión:</u>
La función es derivable en todo su campo de existencia, luego todos sus máximos y mínimos se obtendrán a partir del estudio de sus derivadas.

$$f'\left(x\right)=1-cos\,x$$
$$f'\left(x\right)=0\Rightarrow 1-cos\,x=0\Rightarrow cos\,x=1\Rightarrow x=2k\pi\ \ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$$
$$f''\left(x\right)=sen\,x$$
$$f''\left(2k\pi\right)=0\ ;\ \ f'''\left(x\right)=cos\,x\ ,\ \ f'''\left(2k\pi\right)=1\neq 0\Rightarrow en\ \ x=2k\pi\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)\ la\ \ función\ tiene\ puntos\ de\ silla$$
$$f''\left(x\right)=0\Rightarrow sen\,x=0\Rightarrow x=2k\pi\ \ y\ \ x=\left(2k+1\right)\pi\ ;\ como\ \ f'''\left(2k\pi\right)=1\neq 0\ \ \ y\ \ f'''\left(\left(2k+1\right)\pi\right)=-1\neq 0$$
$$hay\ \ puntos\ \ de\ \ inflexión\ \left(en\ \ x=2k\pi\ \ hemos\ \ visto\ \ que\ \ son\ \ de\ \ silla\right).$$

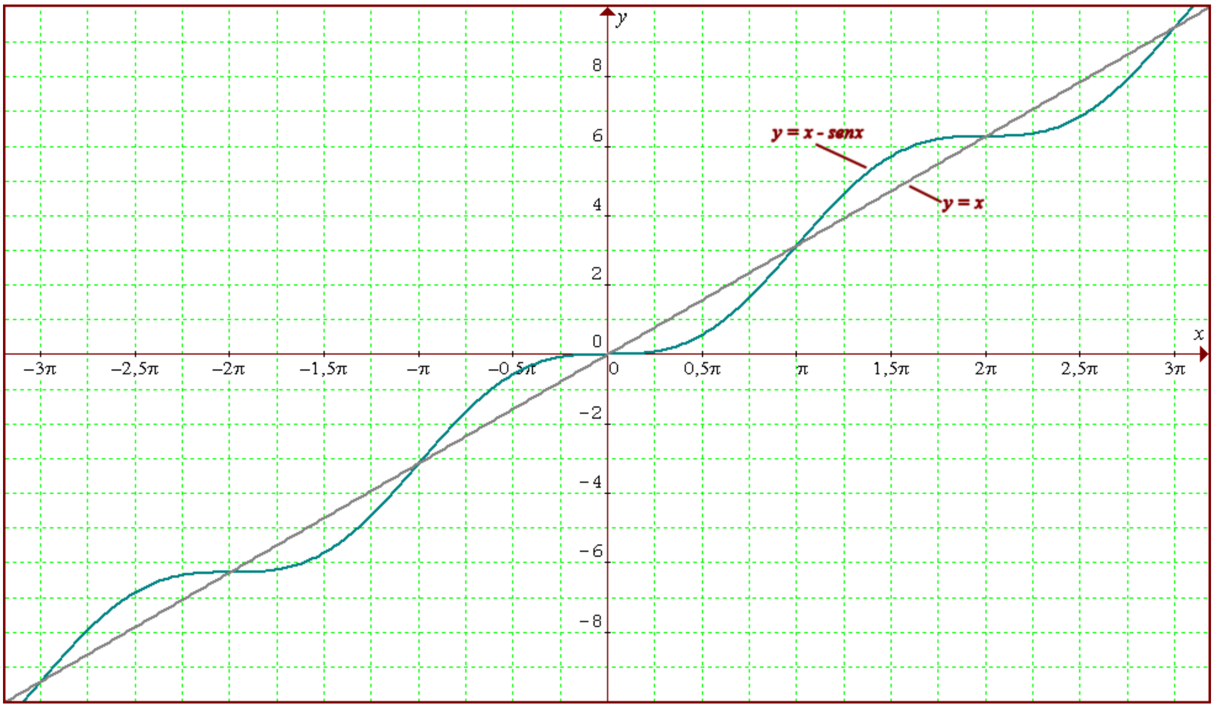
<u>Crecimiento y decrecimiento:</u>
Tenemos que estudiar el signo de $f'\left(x\right)=1-cos\,x$ para determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento. Esto equivale a resolver la inecuación: $1-cos\,x>0$ pero como $1-cos\,x\geq 0$ la función es siempre creciente salvo en los puntos de silla que tiene tangente horizontal.

Debemos fijarnos en que la función $f\left(x\right)=x-sen\,x$ corta a la recta $y=x$ en las soluciones de la ecuación $x=x-sen\,x\Rightarrow sen\,x=0\ \Rightarrow\ x=k\pi\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$, es decir, en todos los puntos de inflexión que es donde hay cambio de curvatura, por tanto este es un caso en el que se hace necesario analizarla.

<u>Curvatura:</u>
Veamos el signo de la segunda derivada,
$f''\left(x\right)>0\Rightarrow sen\,x>0\Rightarrow x\in\left(0,\pi\right)\cup\left(2\pi,3\pi\right)\cup\left(4\pi,5\pi\right)\cup\ldots.$, es decir, en los intervalos de la forma $\left(2k\pi,\ 2k\pi+\pi\right)$, la función presenta una curvatura $\cup$

$f''\left(x\right)<0\Rightarrow sen\,x<0\Rightarrow x\in\left(\pi,2\pi\right)\cup\left(3\pi,4\pi\right)\cup\left(5\pi,6\pi\right)\cup\ldots.$, es decir, en los intervalos de la forma $\left(2k\pi+\pi,\ 2k\pi+2\pi\right)$, la función presenta una curvatura $\cap$

Con los datos obtenidos podemos representar la función:



❖ $f\left(x\right)=\dfrac{x^3}{\left(x-1\right)^2}$

Dominio: $Dom\ f=\mathbb{R}-\{1\}$; ya que es un cociente de polinomios y el denominador se anula en $x=1$.

Cortes con los ejes: $\begin{cases} eje\ OY: x=0 \Rightarrow f\left(0\right)=0;\ corte\ en\ \left(0,0\right) \\ eje\ OX: y=0 \Rightarrow \dfrac{x^3}{\left(x-1\right)^2}=0 \Rightarrow x^3=0,\quad x=0;\quad corte\ en\ \left(0,0\right) \end{cases}$

Simetrías: $f\left(-x\right)=\dfrac{\left(-x\right)^3}{\left(-x-1\right)^2}=\dfrac{-x^3}{\left(x+1\right)^2}\neq\pm f\left(x\right)$, la función no es par y tampoco impar luego no presenta simetrías de las consideradas.

Límites: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{\left(x-1\right)^2}\triangleq\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2}{2\left(x-1\right)}\triangleq\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x}{2}=\infty$, del mismo modo $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3}{\left(x-1\right)^2}=-\infty$ ($\triangleq$ indica que aplicamos la regla de L´Hôpital).

– No tiene asíntotas horizontales.

– $\lim_{x\to 1^+} \frac{x^3}{(x-1)^2} = +\infty$, $\lim_{x\to 1^-} \frac{x^3}{(x-1)^2} = +\infty$; la recta $x=1$ es asíntota vertical.

– Buscamos asíntota oblicua: $m = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x(x-1)^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{(x-1)^2} \triangleq \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{2(x-1)} \triangleq \lim_{x\to\infty} \frac{2}{2} = 1$

$$n = \lim_{x\to\infty}\left[f(x)-x\right] = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-2x+1} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-x}{x^2-2x+1} \triangleq \lim_{x\to\infty} \frac{4x-1}{2x-2} \triangleq \lim_{x\to\infty} \frac{4}{2} = 2$$

Con lo que la recta $y = x+2$ es asíntota oblicua para la función.

Máximos, mínimos y puntos de inflexión:

Por tratarse de una función derivable en todo su campo de existencia, todos sus máximos y mínimos se obtendrán a partir del estudio de sus derivadas.

$$f'(x) = \frac{3x^2(x-1)^2 - x^3 2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{3x^2(x-1)-2x^3}{(x-1)^3} = \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3} = 0 \Rightarrow x^2(x-3) = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = 3$$

$$f''(x) = \frac{6x}{(x-1)^4}$$

$$f''(3) = \frac{18}{16} > 0 \Rightarrow en\ x=3\ la\ \ función\ tiene\ un\ mínimo.\ Punto\ \left(3, \frac{27}{4}\right)$$

$$f''(0) = 0 \Rightarrow f'''(x) = \frac{-18x-6}{(x-1)^5}\ ,\ f'''(0) \neq 0\ ,\ en\ (0,0)\ la\ \ función\ tiene\ un\ punto\ de\ silla$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{6x}{(x-1)^4} = 0 \Rightarrow x = 0\ ;\ \ punto\ de\ inflexión\ encontrado\ antes.$$

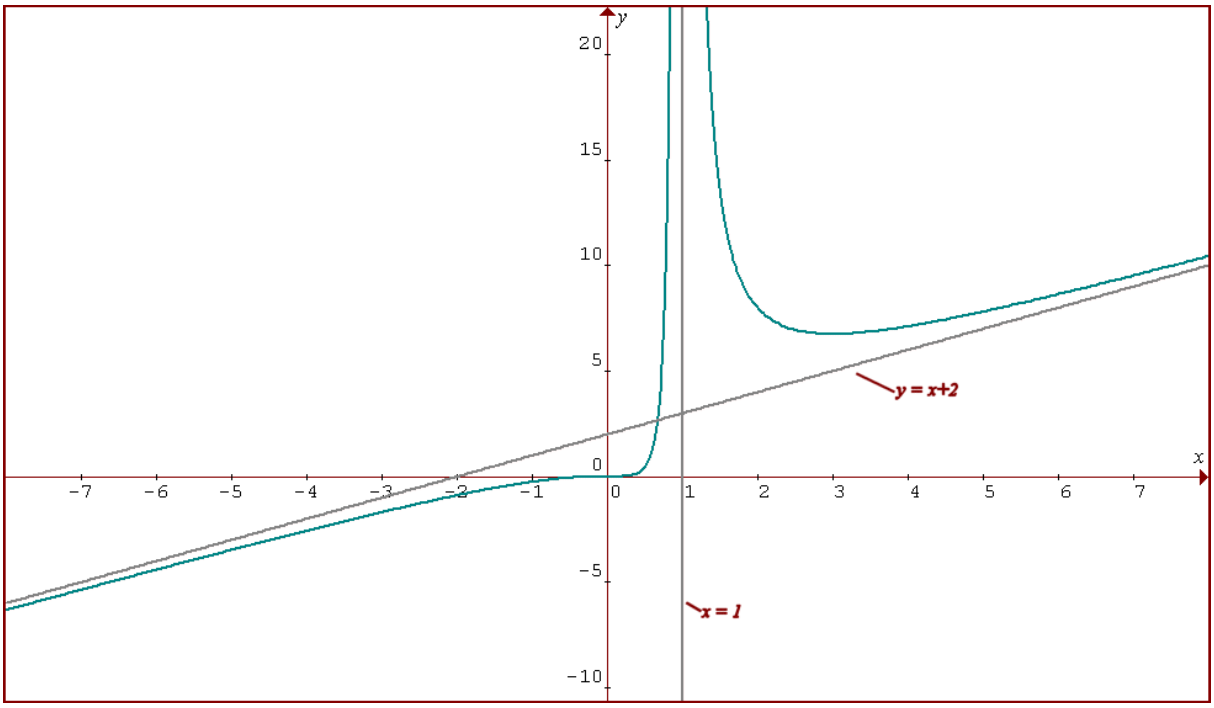
Crecimiento y decrecimiento:

Dividimos el campo de existencia en los siguientes intervalos $(-\infty,0);\ (0,1);\ (1,3);\ (3,\infty)$. Tenemos que estudiar el signo de $f'(x) = \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$ en cada intervalo para determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento. Esto equivale a resolver una de estas inecuaciones: $\frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3} < 0$ o $\frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3} > 0$. Para ello utilizaremos la siguiente tabla:

	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,3)$	3	$(3,\infty)$
x^2	$+$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$(x-3)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x-1)^3$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$	$+$	0	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$

De aquí se deduce que la función es creciente en los intervalos $(-\infty,0)\cup(0,1)\cup(3,\infty)$ y es decreciente en el intervalo $(1,3)$.

Con los datos obtenidos representamos la función:



❖ $f(x)=e^{\frac{x+1}{x-1}}$

<u>Dominio:</u> $Dom\ f=\mathbb{R}-\{1\}$; ya que el denominador del exponente se anula en $x=1$.

<u>Cortes con los ejes:</u> $\begin{cases} eje\ OY: x=0 \Rightarrow f(0)=e^{-1};\ corte\ en\ (0,e^{-1}) \\ eje\ OX: y=0 \Rightarrow e^{\frac{x+1}{x-1}}=0 \Rightarrow no\ hay\ cortes\ con\ eje\ OX \end{cases}$

Simetrías: $f(-x)=e^{\frac{-x+1}{-x-1}}\neq \pm f(x)$, la función no es par y tampoco impar luego no presenta simetrías de las consideradas.

Límites: $\lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{x+1}{x-1}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+1}{x-1}}=e^{1}=e$, del mismo modo $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{\frac{x+1}{x-1}}=e$.

- La recta $y=e$ es una asíntota horizontal.
- $\lim\limits_{x\to 1^{+}} e^{\frac{x+1}{x-1}}=e^{\lim\limits_{x\to 1^{+}}\frac{x+1}{x-1}}=e^{+\infty}=\infty$; $\lim\limits_{x\to 1^{-}} e^{\frac{x+1}{x-1}}=e^{\lim\limits_{x\to 1^{-}}\frac{x+1}{x-1}}=e^{-\infty}=0$. La recta $x=1$ es asíntota vertical cuando $x\to 1^{+}$
- No tiene asíntotas oblicuas porque $m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{\frac{x+1}{x-1}}}{x}=\dfrac{\lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{x+1}{x-1}}}{\lim\limits_{x\to\infty} x}=\dfrac{e}{\infty}=0$

Máximos, mínimos y puntos de inflexión:

Por tratarse de una función derivable en todo su campo de existencia, todos sus máximos y mínimos se obtendrán a partir del estudio de sus derivadas.

$$f'(x)=\frac{-2}{(x-1)^{2}}\cdot e^{\frac{x+1}{x-1}}$$

$f'(x)=0\Rightarrow \dfrac{-2}{(x-1)^{2}}\cdot e^{\frac{x+1}{x-1}}=0$ que no tiene solución por lo que la función no tiene máximos ni mínimos.

$f''(x)=\dfrac{4x}{(x-1)^{4}}\cdot e^{\frac{x+1}{x-1}}$; $f''(x)=0\Rightarrow 4x=0\Rightarrow x=0$, en $\left(0,e^{-1}\right)$ hay un punto de inflexión.

Crecimiento y decrecimiento:

Dividimos el campo de existencia en los siguientes intervalos $(-\infty,1)$; $(1,\infty)$. Tenemos que analizar el signo de $f'(x)=\dfrac{-2}{(x-1)^{2}}\cdot e^{\frac{x+1}{x-1}}$ en esos intervalos, pero como $(x-1)^{2}$ y $e^{\frac{x+1}{x-1}}$ son positivos en todos los puntos de los intervalos, $f'(x)<0$ siempre, por tanto la función es decreciente en todo su dominio.

- ✓ Hay que señalar que aunque la función decrece cuando $x\to 1^{-}$ y $\lim\limits_{x\to 1^{-}} f(x)=0$, no existe mínimo. Sí es cierto que $\inf f=0$ pero éste no pertenece al conjunto imagen.

Curvatura:

Veamos el signo de la segunda derivada,

$f''(x)>0\Rightarrow \dfrac{4x}{(x-1)^{4}}\cdot e^{\frac{x+1}{x-1}}>0$ y esto se cumple cuando $x>0$, por tanto para $x\in(0,1)\cup(1,\infty)$ la función tiene una curvatura $\cup$

$f''(x)<0$ será cuando $x<0$ y para los $x\in(-\infty,0)$ la función tendrá una curvatura $\cap$

Con los datos obtenidos representamos la función: