

SISTEMAS DE ECUACIONES

1. Discutir y resolver el sistema según los valores del parámetro a :

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + az = a \\ x + y + az = a^2 \end{cases};$$

Solución:

Si $a \neq 0$ y $a \neq 1$, $\text{Rang}(A) \neq \text{Rang}(\bar{A}) \Rightarrow$ sistema incompatible

Si $a = 0$, $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(\bar{A}) = 2 \Rightarrow$ sistema compatible indeterminado

Si $a = 1$, $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(\bar{A}) = 1 \Rightarrow$ sistema compatible indeterminado

$$a = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = -\lambda \\ z = 1 \end{cases}; \quad a = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = 1 - \lambda - \mu \end{cases}$$

2. Discutir el siguiente sistema según los valores del parámetro a y resolverlo en los casos de compatibilidad.

$$\begin{cases} 2x + 3y + az = 0 \\ ay - z = 2 \\ ax + ay + az = a \end{cases}$$

Solución:

Si $a \neq 0$ y $a \neq 1$, $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(\bar{A}) = 3 \Rightarrow$ sistema compatible determinado

Si $a = 0$, $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(\bar{A}) = 2 \Rightarrow$ sistema compatible indeterminado

Si $a = 1$, $\text{Rang}(A) = 2 \neq \text{Rang}(\bar{A}) = 3 \Rightarrow$ sistema incompatible

$$a \neq 0, a \neq 1 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{a^2 + 2a - 9}{(a-1)^2} \\ y = \frac{2(a^2 - 3)}{(a-1)^2} \\ z = \frac{2a^2 - 4a - 6}{-a(a-1)^2} \end{cases}; \quad a = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{2}\lambda \\ y = \lambda \\ z = -2 \end{cases}$$

3. Resolver los sistemas siguientes:

$$a) \begin{cases} 3x - y + 2z = 2 \\ x - y + 4z = 12 \\ x + y - 6z = 1 \\ 5x - y = 15 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ 2x + 3y + z + 4t = 0 \\ y - z + t = 3 \\ x - 2t = 10 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 3x + 7y + 6z - 5t = -8 \\ 2x + 3y + 4z - t = -2 \\ x - y + 2z + 3t = 4 \\ 3x + 2y + 6z + 2t = 2 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} 6x - 9y = 0 \\ -4x + 6y = 0 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} 2x + 3y + 4z = 0 \\ -x + 10y + 3z = 0 \\ 4x + 5y + 7z = 0 \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} 3x + y - z + t = 0 \\ 7x - y + 2z + 4t = 0 \\ y - 2z + t = 0 \end{cases}$$

$$g) \begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ -x + 2z = 2 \\ 2x + y = -1 \\ -2x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$h) \begin{cases} x + y - z + t = 2 \\ 2x - y + z + 2t = 1 \\ 2x + 2y - 2z + 2t = 0 \end{cases}$$

$$i) \begin{cases} 2x + y - z - t = 4 \\ 3x - 2y + z + 2t = 0 \end{cases}$$

Soluciones:

$$\begin{aligned} a) & \text{ incompatible} & b) & \left(x = -\frac{128}{5}, y = \frac{179}{5}, z = 15, t = -\frac{89}{5} \right) & c) & \left(x = 2 - 2\lambda - \frac{8}{5}\mu, y = -2 + \frac{7}{5}\mu, z = \lambda, t = \mu \right) \\ d) & \left(x = \frac{3}{2}\lambda, y = \lambda \right) & e) & (x = 0, y = 0, z = 0) & f) & \left(x = -\frac{5}{7}\lambda, y = \frac{23}{7}\lambda, z = \frac{15}{7}\lambda, t = \lambda \right) \\ g) & \text{ incompatible} & h) & \text{ incompatible} & i) & \left(x = \frac{8}{7} + \frac{1}{7}\lambda, y = \frac{12}{7} + \frac{5}{7}\lambda + \mu, z = \lambda, t = \mu \right) \end{aligned}$$

4. Encontrar los valores del parámetro a para que el siguiente sistema tenga soluciones distintas de la trivial.

$$\begin{cases} x - ay - z = 0 \\ (2 - 2a)x + 5y + z = 0 \\ 4x + y + (5 + a)z = 0 \end{cases}$$

Solución: $a = -2$; $a = \frac{-2 + \sqrt{46}}{2}$; $a = \frac{-2 - \sqrt{46}}{2}$

5. Demostrar que el sistema $\begin{cases} -x + by + cz = 0 \\ ax - y + cz = 0 \\ ax + by - z = 0 \end{cases}$ admite solución distinta de la trivial, si se verifica

que $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} = 2$.

6. Determinar, si existe, el valor del parámetro a para que el siguiente sistema sea compatible indeterminado.

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 1 \\ x + y - az = 2 \\ y - z = -1 \end{cases}$$

Solución:

Para $a = \frac{4}{3}$ el sistema es incompatible, para $a \neq \frac{4}{3}$ el sistema es compatible determinado.

En ningún caso el sistema es compatible indeterminado.

7. Estudiar el sistema según los valores de los parámetros a y b

$$\begin{cases} ax + by + z = 1 \\ x + aby + z = b \\ x + by + az = 1 \end{cases}$$

Solución:

Si $b \neq 0$, $a \neq 1$ y $a \neq -2$, $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(\bar{A}) = 3 \Rightarrow$ sistema compatible determinado

Si $a = 1$, $b \neq 1$, $\text{Rang}(A) = 1 \neq \text{Rang}(\bar{A}) = 2 \Rightarrow$ sistema incompatible

Si $a = 1$, $b = 1$, $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(\bar{A}) = 1 \Rightarrow$ sistema compatible indeterminado

Si $a = -2$, $b \neq -2$, $\text{Rang}(A) = 2 \neq \text{Rang}(\bar{A}) = 3 \Rightarrow$ sistema incompatible

Si $a = -2$, $b = -2$, $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(\bar{A}) = 2 \Rightarrow$ sistema compatible indeterminado

Si $b = 0$, $a \neq 1$, $\text{Rang}(A) = 2 \neq \text{Rang}(\bar{A}) = 3 \Rightarrow$ sistema incompatible

Si $b = 0$, $a = 1$, $\text{Rang}(A) = 1 \neq \text{Rang}(\bar{A}) = 2 \Rightarrow$ sistema incompatible

8. Resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + 2y + 2z + 3t = 6 \\ 2x + 4y + 3z + 5t = 10 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

Solución:

$$\text{Rang}(A) = \text{Rang}(\bar{A}) = 2 \Rightarrow \text{sistema compatible indeterminado} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - 2\lambda - \mu \\ y = \lambda \\ z = 2 - \mu \\ t = \mu \end{cases}$$

9. Discutir y resolver el siguiente sistema, para los distintos valores reales del parámetro k

$$\begin{cases} 2x - ky + z = 1 \\ 2x + 3y + z = k + 3 \\ kx + ky + (k+1)z = -1 \end{cases}$$

Solución:

Si $k \neq -2$ y $k \neq -3$, $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(\bar{A}) = 3 \Rightarrow$ sistema compatible determinado

Si $k = -2$, $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(\bar{A}) = 2 \Rightarrow$ sistema compatible indeterminado

Si $k = -3$, $\text{Rang}(A) = 2 \neq \text{Rang}(\bar{A}) = 3 \Rightarrow$ sistema incompatible

$$\text{Para } k \neq -2 \text{ y } k \neq -3 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{k^2 + 3k + 3}{k + 3} \\ y = \frac{k + 2}{k + 3} \\ z = \frac{-k^2 - 3k - 3}{k + 3} \end{cases} ; \text{ para } k = -2 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\lambda \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases}$$

10. Discutir el siguiente sistema, para los distintos valores reales del parámetro k

$$\begin{cases} kx + y + z = 1 \\ x + ky + z = 1 \\ x + y + kz = 1 \\ x + y + z = k \end{cases}$$

Solución:

Si $k \neq 1$ y $k \neq -3$, $\text{Rang}(A) < \text{Rang}(\bar{A}) = 4 \Rightarrow$ sistema incompatible

Si $k = 1$, $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(\bar{A}) = 1 \Rightarrow$ sistema compatible indeterminado

Si $k = -3$, $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(\bar{A}) = 3 \Rightarrow$ sistema compatible determinado

$$\text{Para } k = -3 \Rightarrow (x = -1, y = -1, z = -1); \text{ para } k = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - \lambda - \mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases}$$

11. Demostrar que un sistema de n ecuaciones lineales con $(n-1)$ incógnitas es incompatible si

$$|\bar{A}| \neq 0$$

12. Comprobar que si $(s_1, s_2, s_3, \dots, s_n)$ es solución de un sistema homogéneo, entonces también lo es $(\lambda s_1 + \mu s_1, \lambda s_2 + \mu s_2, \lambda s_3 + \mu s_3, \dots, \lambda s_n + \mu s_n)$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

13. Discutir el sistema para los distintos valores de los parámetros m y n

$$\begin{cases} x + my + m^2z = 1 \\ x + my + mnz = m \\ nx + m^2y + m^2nz = m^2n \end{cases}$$

Solución:

Si $m \neq 0$ y $m \neq n$, $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(\bar{A}) = 3 \Rightarrow$ sistema compatible determinado

Si $m = 0$, $\text{Rang}(A) = 1 \neq \text{Rang}(\bar{A}) = 2 \Rightarrow$ sistema incompatible

Si $m = n = 1$, $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(\bar{A}) = 1 \Rightarrow$ sistema compatible indeterminado

Si $m = n$, $m \neq 1$, $\text{Rang}(A) = 1 \neq \text{Rang}(\bar{A}) = 2 \Rightarrow$ sistema incompatible

14. Estudiar y resolver, en su caso, los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

$$a) \begin{cases} x - y + z + t = 2 \\ x + y - z + t = -8 \\ x + y + z - t = 6 \\ -x + y + z + t = -4 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 2x - 3y + z - t = 1 \\ x + z + t = 0 \\ x + 6y + 3z + 7t = -2 \\ x - 3y - 2t = 1 \\ 3y + z + 3t = -1 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x + y + 2z - t = 4 \\ x - y + z + 2t = 3 \end{cases}$$

$$d) \begin{pmatrix} -1 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

15. Estudiar y resolver, según los valores de los parámetros, los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

$$a) \begin{cases} ax + y + z = 2 \\ 3x - z = -2 \\ -x + z = 4 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 2x - y + z = -2 \\ x + ay - 2z = -20 \\ 3x - 5y + z = -3 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} (a-1)^2 x + (a^2-1)y = (a+1)^2 \\ (2a-1)x - (a+1)y = a^2-1 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} ax + y + z = a^2 \\ x - y + z = 1 \\ 3x - y - z = 1 \\ 6x - y + z = 3a \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} ax + 2z = 0 \\ ay - z = a \\ x + 3y + z = 54 \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} ax + y + z = 0 \\ x + ay = 0 \\ 3x + az = 0 \end{cases}$$

$$g) \begin{cases} x - 2y + 4z = a \\ 3x + 4y - z = 0 \\ ax - y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$h) \begin{cases} x - y = 2 \\ (a + 2)x + (a + 3)y = 6 \\ (3a + 1)x + 3ay = 4 \\ 6x - y + z = 3a \end{cases}$$

$$i) \begin{cases} -7x - 7y + 2z = 13 \\ x - 5y - 2z = -9 \\ 4x + y - 2z = a \end{cases}$$

$$j) \begin{cases} ax + ay + z = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = a^2 \end{cases}$$

$$k) \begin{cases} (2a + 2)x + ay + 2z = 2a - 2 \\ 2x + (2 - a)y = 0 \\ (a + 1)x + (a + 1)z = a - 2 \end{cases}$$

$$l) \begin{cases} x + y - z = 2 \\ ax + y + z = 1 \\ x - y + 3z = -3 \\ 4x + 2y = a \end{cases}$$

16. Discutir y resolver, según los valores de los parámetros, los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

$$a) \begin{cases} ax + (2a - b)y = a + b - 3 \\ 5x + 4y = 1 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ x + y + 2z = 3 \\ x + 3y + az = 1 \\ x + 2y + z = b \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} mx + y = n \\ x + my = n \\ x + y = 1 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax + y + z = 1 \\ x + ay + bz = 1 \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} ax + y + z = a \\ x + ay - z = 1 \\ 3x + bz + y = 2 \\ x - y - z = 1 \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} x - 2y - z = 3a + 3b \\ x - y = 1 + 2a + 2b \\ bx + ay = b^2 - a^2 - 6 \\ ax + by = a^2 - b^2 + 6 \end{cases}$$