Conjuntos

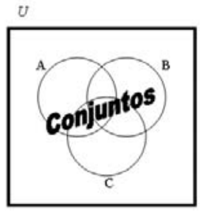
OBJETIVOS

Unidad		Tema	Subtema / Objetivos
III Conjuntos			
	3.1 Definiciones		
	3.2 Numerabilidad		
	3.3 Tipos de conjuntos numéricos		
	3.4 Operaciones con conjuntos		
	3.5 Propiedades con los conjuntos		
		3.1	Reconocer, entender y aplicar los conceptos de conjunto, elemento, universo, cardinalidad, subconjunto, conjunto vacío y conjunto potencia.
		3.2	• Expresar por enumeración y comprensión un conjunto • Entender y definir conjunto finito y conjunto infinito • Entender y aplicar conjuntos homogéneos vs. Conjuntos heterogéneos • Aplicar conjuntos ordenables y no ordenables.
		3.3	Definir y manejar los conjuntos numéricos de enteros, naturales, racionales, irracionales, reales y complejos.
		3.4	Entender, aprender y aplicar las operaciones con conjuntos: complemento, unión, intersección, resta, diferencia y producto cartesiano.
		3.5	Aprender y aplicar las leyes de los conjuntos para las operaciones y simplificaciones de estos: Ley del doble complement0, leyes de Morgan, propiedades conmutativa, asociativa, distributiva, del neutro y del inverso y las propiedades IDEM potentes, dominación y absorción.

3.1 Definiciones

- **Conjunto[6]:** colección de objetos bien definidos, de tal manera que se pueda decir siempre que si un objeto pertenece o no al conjunto al cual nos referimos.
  Nomenclatura: Se determinan entre llaves {}
  Los conjuntos se nombran con letras mayúsculas.
  Conjunto A, B, C,...., Z
  Ejemplos: A= {vocales}

  Los conjuntos también se representan por medio de Diagramas de Venn
  Diagramas de Venn-Euler: formas gráficas de representar conjuntos



- **Elemento**: que pertenece a un conjunto. Ejemplo: a, e, i, o u son los elementos del conjunto de las vocales.

- **Universo**: U : Conjunto que determina un marco de referencia. Ejemplo: U={letras del alfabeto} es el universo del conjunto A= {vocales}

- **Cardinalidad**: Determina el número de elementos de un conjunto. Ejemplo: La cardinalidad del conjunto A= {vocales} es 5 y se representa $|A| = 5$

- **Subconjunto:** $A \subset B$ Si cada elemento de A es un elemento de B y B tiene igual o más elementos que A, esto es la cardinalidad de B es mayor o igual que la cardinalidad de A, se dice que A es un subconjunto de B. Entonces, $A \subseteq B$
  A subconjunto de B $|A| \leq |B|$ *pueden ser iguales o no los conjuntos*

- **Conjunto vacío**: ϕ es aquel conjunto que no contiene elementos. Si $A = \{\ \} \Rightarrow A = \phi \quad \wedge \quad |A| = 0$. Si $A = \{\ 0\ \} \Rightarrow A \neq \phi \quad \wedge \quad |A| = 1$

- **Conjunto potencia**, **P(A):** es la colección de todos los subconjuntos de A. Esto es, si A ={1,2,3,4} entonces **P(A)** = { {0}, {1}, {2}, {3}, {4}, {1,2}, {1,3}, {1,4}, {2,3}, {2,4}, {3,4}, {1,2,3}, {1,2,4}, {1,3,4}, {2,3,4}, {1,2,3,4} }.
  $|\mathrm{P(A)}| = 16$. En general, Si $|A| = n \quad \wedge \quad n \neq 0 \quad \Rightarrow \quad |P(A)| = 2^n$.
  Nota: $\wedge$ significa "y" de conjunción, $\Rightarrow$ significa "por lo tanto"

[6] Fuenlabra, Aritmética y Álgebra, McGraw Hill, México, 2000

3.2 Numerabilidad de conjuntos

- Un conjunto esta descrito por **enumeración** si se han dado explícitamente todos los elementos. Un conjunto esta descrito por **comprensión** si se ha dado en forma implícita mediante una frase que lo describe.

  Ejemplos:

  A = {2, 4, 6, 8}
  A = {pares mayores que cero y menores que diez}
  B = {Canadá, Estados Unidos, México}
  B = {Países del Tratado de Libre Comercio}
  C = {Presidentes de México}
  D = {-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3}
  E = {Matemáticas I, Matemáticas II, Matemáticas III}

- Un conjunto es **homogéneo**[7] cuando los elementos que lo integran son de la misma especie. Un conjunto es **heterogéneo** cuando los elementos que lo componen no son de la misma especie. El concepto de especie debe de fijarse claramente, un concepto puede ser que tienen algo en común.

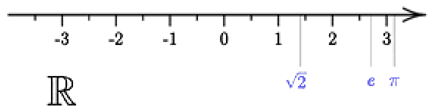
- Siempre que en un conjunto pueda fijarse un criterio de ordenación tal que permita determinar la posición de un elemento con respecto a los demás, se dice que es **ordenable**. Ejemplo, el conjunto de los nombres de los alumnos de una clase se puede enumerar por orden alfabético. Conjunto **no ordenable** es aquel en el cual no se puede fijar tal criterio. Las moléculas de un gas constituyen un conjunto no ordenable debido al constante movimiento que realizan.

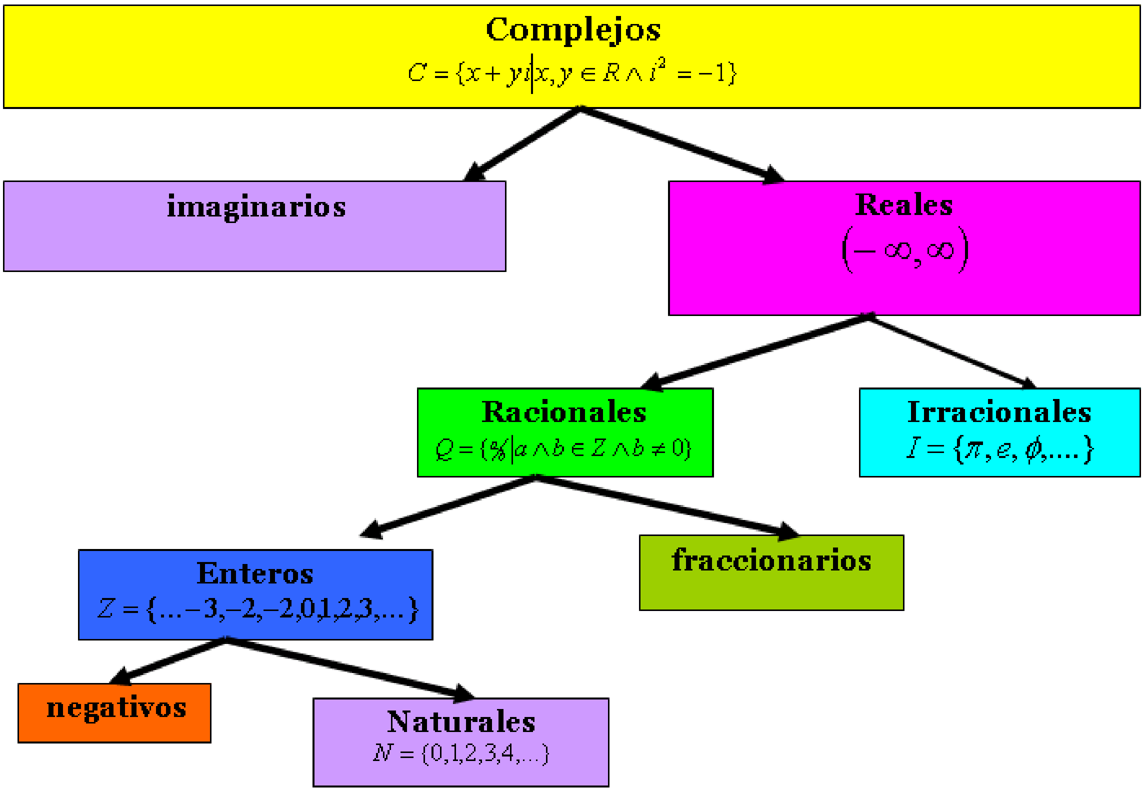
- Cuando todos los elementos de un conjunto ordenable pueden ser considerados uno por uno, real o imaginarios, se dice que el conjunto es **finito.** El conjunto de las naciones que forman el continente americano es un conjunto finito. Son **infinitos** los conjuntos en los cuales no se puede considerar uno por uno sus elementos. Son infinitos los puntos de una recta, los números comprendidos entre el 0 y el 1, etc.

- Dos conjuntos son **iguales** si y solo si contienen el mismo número de elementos en cualquier orden.

[7] Baldor, Aritmética

3.3 Tipos de conjuntos numéricos

Conjunto	Descripción	Representación
Naturales	Conjunto de números enteros positivos incluyendo el cero	$N=\{0,1,2,3,4,\ldots\}$
Enteros	• Conjunto de números enteros positivos y negativos • Conjunto de números enteros positivos (no incluye el cero) •	$Z=\{\ldots-3,-2,-2,0,1,2,3,\ldots\}$ $Z^{+}=\{1,2,3,\ldots\} = \{x\in Z \mid x>0\}$ $Z_n = = \{n\in Z^{+} \mid Z_n = 0,1,2,3,\ldots,n-1\}$
Racionales	• Conjunto de aquellos números que se pueden representar por medio de una fracción $\frac{a}{b}$ • Conjunto de números racionales positivos • Conjunto de números racionales distintos de cero	$Q=\{a/b \mid a\wedge b\in Z\wedge b\neq 0\}$ $Q^{+}=\{r \mid r\in Q\wedge r>0\}$ $Q^{*}=\{r \mid r\in Q\wedge r\neq 0\}$
Reales	• Números enteros o fracción, positivos o negativos incluyendo el cero • Números reales positivos • Reales distintos de cero	$\mathbb{R}$ $R^{+}=\{x \mid x\in R\wedge x>0\}$ $R^{*}=\{x \mid x\in R\wedge x\neq 0\}$
Complejos	Conjunto de números que son reales e imaginarios	$C=\{x+yi \mid x,y\in R\wedge i^{2}=-1\}$ $C^{*}=\{x+yi \mid x,y\in R\wedge x,y\neq 0\}$
Intervalos	Cerrado Semicerrado Semiabierto Abierto	[a,b] = $\{x\in R \,/\, a\le x\le b\}$ intervalo cerrado [a,b) = $\{x\in R \,/\, a\le x< b\}$ intervalo semiabierto (a,b] = $\{x\in R \,/\, a< x\le b\}$ intervalo semiabierto (a,b) = $\{x\in R \,/\, a< x< b\}$ intervalo abierto
Irracionales	Un número irracional no puede expresarse de la forma a/b siendo a y b enteros. Los números irracionales se caracterizan por poseer infinitas cifras decimales que no siguen ningún patrón repetitivo. Debido a ello, los más celebres números irracionales son identificados mediante símbolos. Algunos de éstos son: **π (pi)**: relación entre el **perímetro** de una **circunferencia** y su **diámetro**. **e**: $\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^{n}$ **Φ (número áureo)**: $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$I=\{\pi,e,\phi\}$


Complejos
$C = \{x + yi \mid x, y \in R \wedge i^2 = -1\}$
imaginarios
Reales
$(-\infty, \infty)$
Racionales
$Q = \{a/b \mid a \wedge b \in Z \wedge b \neq 0\}$
Irracionales
$I = \{\pi, e, \phi, \ldots\}$
Enteros
$Z = \{\ldots -3, -2, -2, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$
fraccionarios
negativos
Naturales
$N = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$

3.4 Operaciones con conjuntos

Unión: $A \cup B = \{x \,/\, x \in A \vee x \in B\}$

Intersección: $A \cap B = \{x \,/\, x \in A \wedge x \in B\}$

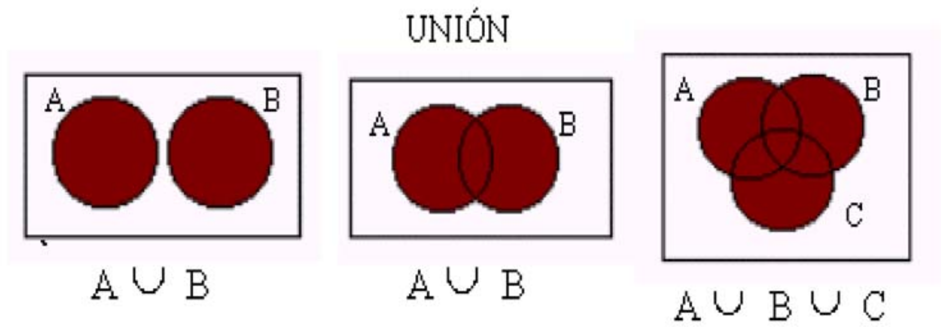
Diferencia sintética:

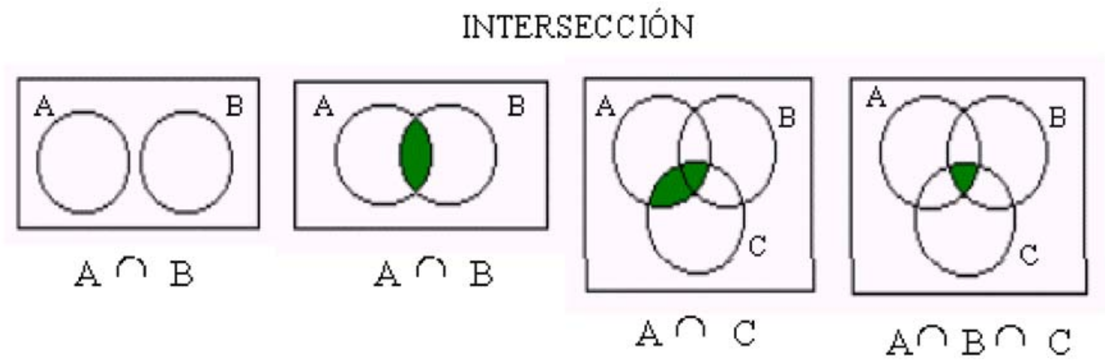
$$\begin{aligned} A \,\Delta\, B &= \{\, x \,/\, (x \in A \vee x \in B) \wedge\ x \notin A \cap B \} \\ &= \{\, x \in A \cup B \ \wedge\ x \notin A \cap B \} \\ &= (A \cup B) \cap \overline{(A \cap B)} \\ &= (A \cup B) - (A \cap B) \end{aligned}$$

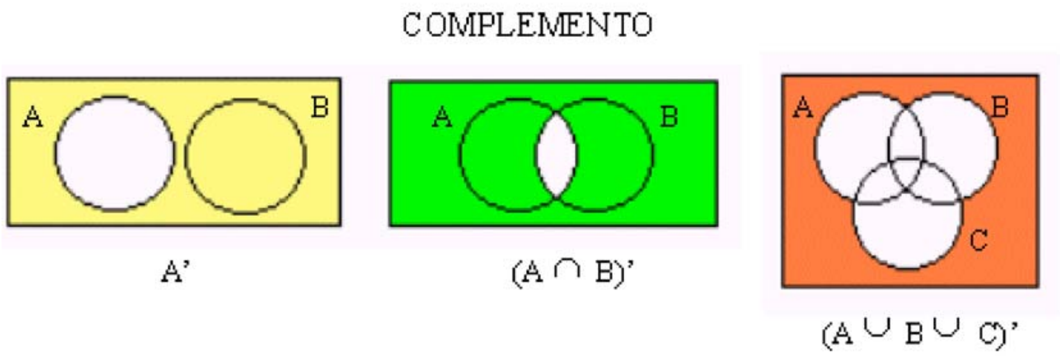
Complemento: $\overline{A} = \{x \,/\, x \notin A\}$

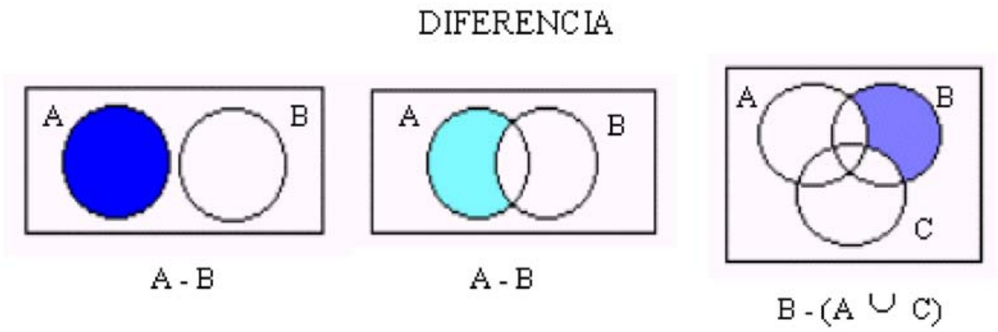
Complemento relativo de A en B (resta):

$$\begin{aligned} A - B &= \{x \,/\, x \in A \wedge x \notin B\} \\ &= A \cap \overline{B} \end{aligned}$$









Producto cartesiano

Para el producto cartesiano de dos conjuntos A y B: $A \times B$ (en este orden), es el conjunto de todos los posibles pares ordenados, tales que la primer componente del par ordenado es un elemento de A y el segundo componente es un elemento de B.

La expresión $A \times B$ se le "A cruz B" y se expresa por descripción: $A \times B = \{(x,y) | x \in A \wedge y \in B\}$ que se lee: el producto A cruz B es el conjunto de parejas ordenadas (x,y) tal que x pertenece a A y pertenece a B.

De tal forma que para $A = \{1,2,3\}$ y $B = \{a,b,c,d\}$ $A \times B = \{(1,a),(1,b),(1,c),(1,d),(2,a),(2,b),(2,c),(2,d),(3,a),(3,b),(3,c),(3,d)\}$ en donde en la pareja $(1,a)$ 1, es la primer componente y a es la segunda componente.

Si los elementos de los conjuntos A y B son números reales, se acostumbra llamar a las componentes (x,y) como (abscisa y ordenada).

3.5 Propiedades de la teoría de conjuntos

Para cualquier conjunto A, B y C tomados de un universo U:

1.	$\overline{\overline{A}} = A$	Ley del doble complemento
2.	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$	Leyes de Morgan
3.	$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$	Propiedades conmutativas
4.	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	Propiedades asociativas
5.	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	Propiedades distributivas
6.	$A \cup A = A$ $A \cap A = A$	Propiedades idempotentes
7.	$A \cup \phi = A$ $A \cap U = A$	Propiedades del neutro
8.	$A \cup \overline{A} = U$ $A \cap \overline{A} = \phi$	Propiedades del inverso
9.	$A \cup U = U$ $A \cap \phi = \phi$	Propiedades de dominación
10.	$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$	Propiedades de absorción
11.	$A - B = A \cap \overline{B}$	Definición de resta
12.	$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$	Definición de diferencia

3.6 Historia[8]

El álgebra de la teoría de conjuntos se desarrolló durante los siglos diecinueve y veinte. En Inglaterra, George Peacock (1806 – 1858) fue un pionero en reformas matemáticas y uno de los primeros en revolucionar el concepto del álgebra y la aritmética. Sus ideas fueron desarrolladas más tarde por Duncan Gregory (1813 – 1844) , William Rowan Hamilton (1805 – 1865) y Augustus de Morgan (1806 – 1871), quien intentó eliminar la ambigüedad del álgebra elemental para ponerla en forma de postulados estrictos. Sin embargo fue en 1845, año en que Boole logró formalizar el álgebra de conjuntos y la lógica y se extendió el trabajo de Peacock y sus contemporáneos.

El enfoque intuitivo de la teoría de conjuntos se realizó en tiempos del matemático ruso Geroge Cantor (1845 – 1918), quien definió un conjunto, en 1895, en forma intuitiva. En la década de 1870, cuando Cantor estaba estudiando las series trigonométricas y las series de números reales, necesitaba una forma para comparar el tamaño de los conjuntos infinitos de números. Su estudio de lo infinito como una realidad, que está en el mismo nivel de lo infinito, fue en su momento revolucionario. Parte de su trabajo fue rechazado ya que resultó ser más abstracto de lo acostumbrado por muchos matemáticos de su tiempo. Pero con el tiempo, ganó aceptación para que en 1890 la teoría de conjuntos, tanto finita como infinita, fuera considerada una rama de las matemáticas como derecho propio.

Al terminar el siglo XIX la teoría era aceptada. Sin embargo, en 1901 Russell mostró que esta teoría de conjuntos, propuesta originalmente, tenía una inconsistencia interna: la falta de restricción para definir los conjuntos (paradoja de Russell). Los matemáticos británicos Lord Bertrand Arthur William Russell (1872 – 1970) y Alfred North Whitehead (1861 – 1947) desarrollaron una jerarquía en la teoría de conjuntos conocida como la teoría de tipos. Con esta teoría, se definían los conjuntos.

El descubrimiento de la paradoja de Russell aun cuando se pudo remediar, tuvo un profundo impacto en la comunidad matemática, ya que muchos comenzaron a preguntarse si había otras contradicciones ocultas. En 1931, el matemático austriaco Kart Göel (1906 – 1978) formuló la idea de que en una condición de consistencia dada, cualquier sistema axiomático formal suficientemente fuerte debe de contener una proposición tal que ni ésta ni su negación sea demostrable y tal que cualquier demostración de consistencia del sistema debe usar ideas de métodos que están más allá de los propios del sistema en sí. Esto quiere decir que no podemos establecer que no existen contradicciones en matemáticas.

La importancia del papel de la teoría de conjuntos en el desarrollo de las matemáticas del siglo XX la define el matemático alemán David Hilbert (1862 – 1943) al decir: “Nadie podrá expulsarnos del paraíso que Cantor ha creado para nosotros”.

[8] [Grimaldi, 176]

George Cantor
1845 – 1918

Augustus De Morgan
(1806 – 1871)

Arthur William Russell
(1872 – 1970)